Differentiaaliyhtälöt I
Luento 1

Johdanto
ja
Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt

5. elokuuta 2014

Johdanto: Mikä on differentiaaliyhtälö?

Ehdotuksia?

- Yhden tuntemattoman ”tavanomainen” yhtälö:
  - Esim. $ay^2 + by + c = 0$; ratkaise luku y.
    - $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad (a \neq 0,\ b^2 - 4ac > 0)$
  - Yleisemmin, olkoon $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jokin funktio.
    Yhtälö $F(y) = 0$; ratkaise luku y.

- Funktionaalinen yhtälö:
  - Esim. $x^2 + y^2 - 1 = 0$; ratkaise y muuttujan <u>x funktiona</u>.
    - $y = y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$ $\quad (-1 \leq x \leq 1)$
  - Yleisemmin, olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jokin funktio.
    Yhtälö $F(x, y) = 0$; ratkaise y muuttujan <u>x funktiona</u>.

- **Differentiaaliyhtälö**:
  - Sisältää myös y:n **derivaattoja** x:n suhteen.
  - Esim. $y' + 2y - 3e^x = 0$; ratkaise $\underline{y \text{ muuttujan } x \text{ funktiona}}$
    - $y = y(x) = Ce^{-2x} + e^x \qquad$ ($C \in \mathbb{R}$ mielivaltainen vakio)

- Ensimmäisen **kertaluvun** differentiaaliyhtälö:
  - Olkoon $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ jokin funktio.
    Yhtälö $F(x, y, y') = 0$; ratkaise $\underline{y \text{ muuttujan } x \text{ funktiona}}$

- Korkeamman kertaluvun ($n = 2, 3, \ldots$) differentiaaliyhtälö:
  - Olkoon $F : \mathbb{R}^{2+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ jokin funktio.
    $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$; ratkaise $\underline{y \text{ muuttujan } x \text{ funktiona}}$
  - Merkinnät: $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$, $y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$.

- Usein F on määritelty vain euklidisen avaruuden ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$,...) osajoukossa, ei koko avaruudessa.

- x ja y ovat aina **skalaareja** (ei vektoreita).

- Differentiaaliyhtälöille(kään) **ei ole** olemassa mitään yleispätevää ratkaisumenetelmää.

- Kurssilla opimme
  - **tunnistamaan** tietyt ratkeavat **erityistapaukset**
  - **ratkaisemaan** ne

- Käsittelemme tiettyjä
  - ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä $F(x, y, y') = 0$
  - toisen kertaluvun yhtälöitä $F(x, y, y', y'') = 0$

- Tavanomainen ratkaisustrategia on palauttaa – erilaisin keinoin – differentiaaliyhtälö integroituvaan muotoon

$$\tilde{y}' = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{y} = \int f(x)\, dx \, .$$

Usein on tyydyttävä myös implisiittiratkaisuun, eli yhtälöön

$$f(x, y) = 0 \, ,$$

joka ei siis ole kuitenkaan differentiaaliyhtälö.

Mitä iloa differentiaaliyhtälöistä on?

- Differentiaaliyhtälö $F(x, y, y', y'') = 0$ kytkee toisiinsa
  - muuttujan x
    - ”aika”
  - selvitettävän suureen y
    - ”polkupyörän sijainti hetkellä x”
  - y:n muutosnopeuden $y' = \frac{dy}{dx}$
    - ”polkupyörän nopeus hetkellä x”
  - y:n muutosnopeuden muutosnopeuden $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$
    - ”polkupyörän kiihtyvyys hetkellä x”

Tehtävä on siis selvittää relaatioon $F(x, y, y', y'') = 0$ perustuen, missä polkupyörä sijaitsee kullakin ajanhetkellä x.

Lämmittelyesimerkki

Liisa ajaa polkupyörällä. Pyörä kulkee ensin nopeudella v, kiihdyttäen sitten 10 sekunnin ajan vakiokiihtyvyydellä a. Kuinka pitkän matkan Liisa kulkee kiihdytysjakson aikana?

Ratkaisu: Merkitään kiihdytykseen kulunutta aikaa x:llä ja sen aikana kuljettua matkaa y:llä. Pätee siis **alkuehto**

$$y'(0) = v.$$

Pyörän nopeus hetkellä x saadaan ratkaisemalla

$$\boxed{y'' = a} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \int a\,dx = ax + C_1.$$

Koska $C_1 = v$ (miksi?), pyörän sijainti hetkellä x saadaan ratkaisemalla

$$\boxed{y' = ax + v} \quad \Leftrightarrow \quad y = \int ax + v\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + vx + C_2.$$

10 sekunnin aikana kuljettu matka on siis

$$y(10) - y(0) = \frac{1}{2}a \cdot 10^2 + v \cdot 10 + C_2 - C_2 = 50a + 10v. \quad \square$$

Monisteen esimerkki 1.1 (Radioaktiivisuus)

Radioaktiivisen näytteen säteilyn voimakkuutta mitataan näytteessä tapahtuvien ytimien hajoamisten lukumäärällä sekunnissa. Suuretta kutsutaan aktiivisuudeksi ja sen symboli on A. Merkitään aikaa t:llä.

Aktiivisuuden aikakehitystä kuvaa (fysiikasta tunnettu) yhtälö

$$A'(t) = -kA(t). \tag{1}$$

Tässä k on kyseiselle aineelle ominainen vakio. Oletetaan, että $A(t) > 0$ joka ajanhetkellä t, ja että $k > 0$ (tulkinta?).

Oletetaan, että Geiger-mittarilla on saatu selville

$$A(0) = A_0. \tag{2}$$

Ratkaistaan yhdessä taululla **alkuarvotehtävä** (1)–(2).

Yleistä teoriaa

Määritelmä 1.1

(a) Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^{n+2}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Yhtälö

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

on differentiaaliyhtälö (DY), jonka kertaluku on n.

(b) Olkoon f avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Kertaluvun n differentiaaliyhtälö

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{4}$$

on **normaalimuotoinen**.

(c) Vähintään kertalukuun n asti derivoituva yhden reaalimuuttujan funktio $y = y(x) : I \to \mathbb{R}$ on DY:n (3) (tai (4)) ratkaisu välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos (3) (tai (4)) toteutuu kaikissa pisteissä $x \in I$.

(d) Välillä I määriteltyjen DY:n ratkaisujen joukkoa, joka riippuu kertaluvun n mukaisesti n:stä vapaasti valittavasta oleellisesta parametrista, kutsutaan **yleiseksi ratkaisuksi välillä I.**

Lokaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause (OY-lause)

Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ **alue**, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.

(a) Tällöin **alkuarvotehtävällä (AAT)**

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on jollakin avoimella välillä I määritelty ratkaisu[1] $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$. [Ja $x_0 \in I$.]

(b) Olkoon $x_0 \in I_1 \cap I_2$, ja olkoot $y_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ ($k = 1, 2$) kaksi kyseisen AAT:n ratkaisua, jotka kulkevat D:ssä [eli $(x, y_k(x)) \in D$ kaikilla $x \in I_k$, $k = 1, 2$]. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall\, x \in I_1 \cap I_2.$$

- Todistus: Diffis II

[1] Ratkaisu on jatkuvasti derivoituva. Miksi?

Poistumislause

Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia siinä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$.

(a) Tällöin alkuarvotehtävällä (AAT)

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on **maksimaaliratkaisu** $y : I \to \mathbb{R}$, jolle ratkaisukäyrä $\{(x, y(x)) : x \in I\}$ kulkee alueessa D, ja sen **hännät poistuvat kyseisen alueen reunalle**.

(b) Maksimaaliratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$ on **yksikäsitteisesti määrätty**, ja kaikki muut AAT:n ratkaisut D:ssä ovat sen **rajoittumia**.

- Todistus: Diffis II

Separoituvat differentiaaliyhtälöt

Määritelmä 1.4

Ensimmäisen kertaluvun DY on **separoituva**, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' = p(x)q(y),$$

missä p ja q ovat tunnettuja yhden muuttujan funktioita.

Kysymys (pohdi naapurin kanssa)

Mitkä ovat luonnolliset oletukset funktioista p ja q? (Miksi?)

Esimerkki

Radioaktiivisen hajoamisen esimerkki on separoituva:

$$A'(t) = -kA(t) = p(t)q(A(t)),$$

missä

$$p(t) \equiv -k \quad ja \quad q(A) = A.$$

Separoituvan yhtälön $y' = p(x)q(y)$ ratkaiseminen

Olkoon p jatkuva ja q jatkuvasti derivoituva. (Miksi?)

(1) Jokaista q:n nollakohtaa y_0 vastaa **triviaali ratkaisu**:

$$y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \equiv y_0$$

(2) Oletetaan seuraavaksi, että $q \neq 0$ jollakin välillä. Kyseisellä välillä ratkaisun $y = y(x)$ on toteutettava

$$\begin{aligned} y'(x) = p(x)q(y) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'(x)}{q(y(x))} = p(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{q(y(x))}\,dx = \int p(x)\,dx + C. \end{aligned}$$

Toisaalta,

$$H(y) = \int \frac{1}{q(y)}\,dy \quad \Longrightarrow \quad \frac{dH(y(x))}{dx} = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{q(y(x))}$$

eli

$$\boxed{H(y(x)) = \int p(x)\,dx + C}\,.$$

Usein kirjoitetaan vain lyhyesti

$$\int \frac{1}{q(y)}\, dy = \int p(x)\, dx + C\ .$$

Tämä on helppo muistaa ”kertomalla yhtälö ristiin”:

$$\begin{aligned} y' &= p(x)q(y) \\ \frac{dy}{dx} &= p(x)q(y) \\ \frac{1}{q(y)}\, dy &= p(x)\, dx \end{aligned}$$

sekä lisäämällä integraalimerkit ja vakio.

Esimerkki

Yhtälö

$$y' = xy$$

on separoituva: $p(x) = x$ ja $q(y) = y$. Lisäksi p on jatkuva ja q jatkuvasti derivoituva, joten OY-lause pätee.

(1) Triviaaliratkaisu: $y \equiv 0$.

(2) Muut ratkaisut:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy \\
\frac{1}{y}\,dy &= x\,dx \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int x\,dx \\
\ln|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\
|y| &= e^{\frac{1}{2}x^2} e^{C_1} = C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C_2 > 0 \\
y &= C_3 e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

Triviaaliratkaisu voidaan tällä kertaa yhdistää edelliseen:

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$