Differentiaaliyhtälöt I
4. harjoitustehtävät
(14 tehtävää, max 40 pistettä)

28. elokuuta 2014

Tehtävä 1. Tutkitaan 2. kertaluvun lineaarista homogeeniyhtälöä $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, missä p ja q ovat jatkuvia välillä I. Osoita:

(a) Jos (y_1, y_2) on perusjärjestelmä, niin myös (y_1+y_2, y_1-y_2) on. Perusjärjestelmä siis *ei ole* yksikäsitteinen. (1 p)

(b) Jos (y_1, y_2) ja (z_1, z_2) ovat perusjärjestelmiä, niin z_1 ja z_2 ovat funktioiden y_1 ja y_2 lineaarikombinaatioita. (1 p)

Tehtävä 2. Yhtälöllä $y''-y=0$ on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^x, e^{-x})$ koko reaaliakselilla $I=\mathbb{R}$. Havaitaan, että $y_1(0) = y_2(0) = 1$, eli *ratkaisukäyrät leikkaavat* pisteessä $(0, 1)$. Onko tämä ristiriidassa (toisen kertaluvun lineaaristen yhtälöiden) olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen kanssa? (2 p)

Tehtävä 3. Ratkaise seuraavat tehtävät:

(a) $y''-8y'+7y=0$ (2 p)

(b) $y''-y'+7y=0$ (2 p)

(c) $y''-6y'+9y=0$ alkuehdolla $y(0)=1$, $y'(0)=-2$ (2 p)

Tehtävä 4. Ratkaise yhtälö $y''+\sin(x)y'=0$. (2 p)

Tehtävä 5. Määritä annetulle yhtälölle ja välille perusjärjestelmä:

1. $y''-\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=0$, $x\in(0,\infty)$. Eräs ratkaisu on $y_1(x)=x$. (2 p)
2. $xy''-(x+1)y'+y=0$, $x\in(0,\infty)$. Eräs ratkaisu on $y_1(x)=e^x$. (2 p)

Tehtävä 6. Palataan ensimmäisen kertaluvun lineaariseen yhtälön $y' + p(x)y = q(x)$, missä p ja q ovat jatkuvia välillä I. Homogeeniyhtälöllä on sellainen ratkaisu $y_1 : I \to \mathbb{R}$, että $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$ ja että kaikki ratkaisut sisältyvät yleiseen ratkaisuun Cy_1.

(a) Etsi y_1 integroivan tekijän menettelyllä. (Kertaus on opintojen äiti!) (1 p)

(b) Etsi (epähomogeenisen) lineaarisen yhtälön kaikki ratkaisut *vakion varioinnilla.* (1 p)

Tehtävä 7. Etsi yhtälön $y'' - 2y' + y = 8e^x$ erityisratkaisu parametrein varustetun yritteen menetelmällä. (2 p)

Tehtävä 8. Ratkaise vakion variointia käyttäen alkuarvotehtävä $y'' + y = 4 \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$. (2 p)

Tehtävä 9. Tarkastellaan epähomogeenista yhtälöä $y'' - y = e^x$ (LY). Vastaavalla homogeeniyhtälöllä on perusjärjestelmä $(y_1, y_2) = (e^x, e^{-x})$. Etsi vakion varioinnilla yhtälön LY kaikki ratkaisut. (2 p)

Lopuissa tehtävissä tutkitaan fysiikkaan liittyviä sovelluksia. Tehtävien ratkaisemiseksi fysiikan tuntemus ei kuitenkaan ole tarpeen; kurssilla opitut asiat riittävät hyvin.

Tehtävä 10. (Energiaperiaate) Oletetaan, että kappale liikkuu x-akselilla ja siihen vaikuttaa vain kappaleen sijainnista x riippuva (eli konservatiivinen) voima $F = F(x)$. Newtonin toisen lain mukaan $F = ma$, missä m (vakio) on kappaleen massa ja $a(t) = \ddot{x}(t)$ on sen kiihtyvyys ajanhetkellä t. Toisin sanoen saadaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Kappaleen liike-energia on tunnetusti $K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2$. Toisaalta potentiaalienergian $V(x)$ ja voiman $F(x)$ välillä on yhteys $\frac{d}{dx}V(x) = -F(x)$. Osoita, että kokonaisenergia $E(t) = K(t) + V(x(t))$ on itse asiassa ajan suhteen vakio. (2 p)

[Energiaperiaatteeseen palataan Tehtävässä 13.]

Tehtävä 11. (Kvanttimekaaninen hiukkanen laatikossa) Pistemäinen hiukkanen, jonka massa on m ja liike-energia E (positiivisia vakioita), on rajoitettu liikkumaan x-akselin välillä $[0, 1]$ "laatikkomaisen" potentiaalin

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ \infty, & x \notin [0,1] \end{cases}$$

vaikutuksesta. Klassisen mekaniikan mukaisesti hiukkanen poukkoilisi edestakaisin välin $[0, 1]$ päätepisteiden välillä. Kvanttimekaniikassa puolestaan hiukkasen käyttäytymistä kuvaa nk. aaltofunktio $\psi(x)$. Se toteuttaa Schrödingerin yhtälön

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = (E - V(x))\psi(x) = E\psi(x), \quad x \in [0,1].$$

Tässä $\hbar > 0$ on Planckin vakio. Potentiaalin muoto pakottaa ehdon $\psi(x) = 0$ aina kun $x \leq 0$ tai $x \geq 1$.

(a) Etsi ensin Schrödingerin yhtälön kaikki ratkaisut välillä $[0, 1]$. (2 p)

(b) Määritä ne ratkaisut, jotka toteuttavat ehdon $\psi(0) = 0$. (1 p)

(c) Aaltofunktio ψ ei saa olla identtisesti nolla. Määritä nyt kaikki sellaiset energian arvot $E = E_n$ ($n = 1, 2, \dots$), jotka toteuttavat ehdon $\psi(1) = 0$ aiemman ehdon $\psi(0) = 0$ lisäksi. (Ilmiötä, että E voi saada vain diskreettejä arvoja, kutsutaan energian kvantittuneisuudeksi.) (1 p)

Tehtävä 12. (Kvanttimekaaninen harmoninen oskillaattori) Jos edellisen tehtävän potentiaali onkin kvadraattinen koko reaaliakselilla $\mathbb{R}$, $V(x) = x^2$, kuvaa malli nk. harmonista oskillaattoria[1] (eli värähtelijää). Schrödingerin yhtälö voidaan silloin tietyin muunnoksin kirjoittaa muodossa (Hermiten yhtälö)

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \ .$$

Tässä $\lambda \in \mathbb{N}$ on parametri. (Yhtälön ratkaisut tunnetaan Hermiten polynomeina.) Tapauksessa $\lambda = 4$ on eräs ratkaisu $y_1(x) = 1 - 2x^2$; etsi saman yhtälön perusjärjestelmä välillä $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. (2 p)

Tehtävä 13. (Energiaperiaate ja epälineaarinen DY) Energiaperiaatetta voidaan soveltaa muotoa $y'' = F(y)$ oleviin yhtälöihin, vaikkei kyseessä olisi varsinaisesti fysikaalinen sovellus. Energiaperiaate kertoo, että määrittelemällä integraalifunktio $G(y) = \int F(y)\,dy$, ”energia” on vakio:

$$E(x) = \tfrac{1}{2} y'(x)^2 - G(y(x)) \equiv K.$$

Tutkitaan nyt toisen kertaluvun *epälineaarista* differentiaaliyhtälöä

$$y'' = 6y^2 \ . \tag{1}$$

(a) Etsi energiaperiaatetta käyttäen yhtälön (1) ne ratkaisut, joille vakio $K = 0$. (Olkoon G:n integroimisvakio 0 – sehän voidaan sisällyttää aina K:hon.) (2 p)

(b) Päteekö yhtälölle (1) superpositioperiaate, eli onko kahden ratkaisun mielivaltainen lineaarikombinaatiokin ratkaisu? (Perustele aina miksi!) (1 p)

(c) Luennolla käsiteltiin OY-lause myös 2. kertaluvun yhtälöille tietyin oletuksin. Lause on siinä mielessä globaali, että se takaa ratkaisun olevan määritelty kaikilla x (tietyllä välillä I). Kohdassa (a) löydetään toisaalta ratkaisuja, jotka eivät ole määriteltyjä jokaisessa pisteessä x, vaikka yhtälö (1) näyttää hyvin yksinkertaiselta (siinä ei esim. ole x:stä riippuvia tekijöitä lainkaan). Miten ”ristiriita” selittyy? (1 p)

[1]Opiskelijoiden keskuudessa käytetään myös nimitystä ”harmillinen oskillaattori” ☺ .

Tehtävä 14. (Mekaaninen värähtely väliaineessa) Tutkitaan jousen päähän kiinnitetyn kappaleen liikettä väliaineessa (esim. vedessä). Rajoitutaan yksiulotteiseen tilanteeseen, jossa jousen toinen pää on kiinnitetty reaaliakselin origoon. Jousi vetää kappaletta kohti origoa sitä voimakkaammin mitä kauempana kappale on. Toisaalta väliaine jarruttaa kappaleen liikettä sitä voimakkaammin mitä nopeammin kappale liikkuu. Kappaleen paikkaa x ajanhetkellä t kuvaa yhtälö

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \ .$$

Tässä m on kappaleen massa, b on väliaineen kitkaa kuvaava vaimennuskerroin ja k on jousen jäykkyyttä kuvaava jousivakio (kaikki positiivisia vakioita). Jos m ja k ovat annetut, niin intuition mukaan massan liike jousen päässä käy sitä vaivalloisemmaksi mitä suurempi b on. (Vrt. liisteri veden sijaan.) Varmistetaan tämä!

(a) Etsi yhtälön epätriviaalit ratkaisut *ylivaimennetussa* tapauksessa $b^2 > 4mk$. (2 p)

(b) Osoita kyseisiä ratkaisuja tutkimalla, ettei jousi pysty pakottamaan kappaletta ”edestakaisin” origon puolelta toiselle värähtelevään liikkeeseen. Osoita, että toisaalta jousi kyllä palauttaa kappaleen asymptoottisesti origoon. (2 p)

(Vihje: osoita nopeuden $\dot{x}$ merkkiä tutkimalla, että kappale kulkee ikuisesti samaan suuntaan, yhtä mahdollista käännöstä lukuun ottamatta.)