Differentiaaliyhtälöt I
3. harjoitustehtävät
(14 tehtävää, max 40 pistettä)

21. elokuuta 2014

Tehtävissä 1 ja 2 pohditaan logistista mallia, jälleen kerran sille luonnollisessa alueessa $D = \{(t, N) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0,\ N \geq 0\}$.

Tehtävä 1. Olkoon $N_0 \neq 0$ ja $N_0 \neq K$. Voiko populaation koko saavuttaa täsmälleen saman arvon kahtena eri ajanhetkenä? (1 p)

Tehtävä 2. Valitaan mielivaltainen piste $(t_1, N_1) \in D$. Osoita Poistumislausetta käyttäen, että on olemassa sellainen alkuehto $N(0) = N_0$, että ratkaisukäyrä kulkee pisteen (t_1, N_1) kautta, eli $N(t_1) = N_1$. (3 p)

Tehtävä 3. 5. luennolla (kalvo 6) todistettiin, että tietyin oletuksin derivoituvalle funktiolle $x : [t_0, \infty) \to \mathbb{R} : x = x(t)$ pätee $\dot{x}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = 0$. Oikeastaan tutkittiin vain vastaoletus $\dot{x}_\infty > 0$. Täydennä todistus tutkimalla vastaoletus $\dot{x}_\infty < 0$. (2 p)

Tehtävä 4. Muokkaa SIS-mallia (ts. sitä kuvaavaa differentiaaliyhtälösysteemiä) niin, että populaation koko ei pysykään vakiona vaan kasvaa syntyvyyden vuoksi eksponentiaalisen kasvumallin mukaisesti. Oleta, että syntyvät yksilöt ovat terveitä. (Vihje: vain toinen yhtälöistä muuttuu.) (2 p)

Tehtävä 5. Luennolla johdettiin SIS-mallille yhtälö $\dot{I} = \beta I(K - I)$ [1] ja käsiteltiin tapaus $K = N - \frac{\alpha}{\beta} > 0$. Tutkitaan nyt tapausta $K \leq 0$. Kvalitatiivisen analyysin keinoin

(a) päättele, että raja-arvo $I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t)$ on olemassa; (1 p)

(b) päättele, että myös $\dot{I}_\infty = \lim_{t\to\infty} \dot{I}(t)$ on olemassa ja itse asiassa $\dot{I}_\infty = 0$; (1 p)

(c) päättele I_∞:n arvo ja tulkitse saamasi tulos. (1 p)

[1] $\beta > 0$

Tehtävä 6. Luennolla osoitettiin, että SIR-mallille alkuarvotehtävän $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ ratkaisukäyrän $(S(t), I(t))$ ura alueessa $S \geq 0, I \geq 0$ saadaan funktion

$$I = (I_0 + S_0 - \frac{\alpha}{\beta} \ln S_0) - S + \frac{\alpha}{\beta} \ln S \tag{1}$$

kuvaajana. Tutkitaan populaatiota, jossa aluksi puolet yksilöistä on sairaita, puolet terveitä (muttei immuuneja): $S_0 = \frac{1}{2}$, $I_0 = \frac{1}{2}$ ja $R_0 = 0$ [2]. Voidaan osoittaa kvalitatiivisen analyysin keinoin, että

$$S_\infty = \lim_{t\to\infty} S(t) > 0 \quad \text{and} \quad I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t) = 0.$$

(a) Hahmottele kaavan (1) mukaiset ratkaisukäyrien urat tapauksissa $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{\alpha}{\beta} = 2$. (Apuna saa käyttää tietokonetta tai graafista laskinta, joskaan se ei ole välttämätöntä.) (1 p)

(b) Perustele kussakin tapauksessa SIR-mallin DY-systeemin avulla, *mihin suuntaan* uraansa pitkin systeemin tila $(S(t), I(t))$ muuttuu ajan funktiona. (1 p)

(c) Kuvaako malli ohimenevää tautiepidemiaa vai endeemistä tautia? Kuinka monta tartuntaa populaatiossa tapahtuu kaikenkaikkiaan? (1 p)

(d) Tulkitse kuvaajien eroa tapauksissa $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{\alpha}{\beta} = 2$. (1 p)

Tehtävä 7. Tutkitaan luennolla esiteltyä takaa-ajomallia, jossa saalis juoksee vakionopeudella $\alpha > 0$ suoraan ylöspäin alkupisteestä $(a, 0)$, $a > 0$, ja saalistaja juoksee suoraan saalista kohti origosta alkaen vakiovauhdilla $\beta > \alpha$.

(a) Mikä geometrinen ehto toteutuu sillä hetkellä, kun saalistaja saa saaliin kiinni? (1 p)

(b) Määritä ajanhetki, jolloin saalistaja saa saaliinsa? (1 p)

(c) Missä tason pisteessä saalis jää kiinni? (1 p)

Tehtävä 8. Todista, että operaattori $(Ly)(x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$ on lineaarinen, kuten luennolla väitettiin (Lause luennon 6 kalvolla 7). (2 p)

Tehtävä 9. Olkoot p, q, r jatkuvia välillä I ja operaattori L kuten yllä. Muistetaan luennolta, että HY:llä $Ly = 0$ on silloin olemassa perusjärjestelmä (y_1, y_2) välillä I. Oletetaan, että y_3 on LY:n $(Ly)(x) = r(x)$ jokin tietty erityisratkaisu välillä I. Todista välillä I:

(a) Funktio $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$ on LY:n ratkaisu kaikilla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. (1 p)

(b) *Kaikki* LY:n ratkaisut ovat edellä mainittua muotoa. (Toisin sanoen LY:n mielivaltaiselle ratkaisulle z on olemassa sellaiset c_1 ja c_2, että $z = c_1y_1 + c_2y_2 + y_3$.) (3 p)

(Opetus: **LY:n yleinen ratkaisu** = **HY:n yleinen ratkaisu** + **LY:n erityisratkaisu**, täysin analogisesti 1. kertaluvun lineaaristen yhtälöiden tapaukselle. Itse asiassa tehtävä osoittaa, että *kaikki* ratkaisut saadaan näin.)

[2] Luvut on mukavuussyistä normalisoitu populaation koolla; esim. $S = \frac{1}{2}$ tarkoittaa, että puolet populaatiosta on terveenä, jne.

Tehtävä 10. Onko annettu yhtälö lineaarinen? Jos on, onko sillä koko $\mathbb{R}$:ssä määritelty yksikäsitteinen ratkaisu alkuehdolla $y(1) = 3$, $y'(1) = \ln 6$?

(a) $y'' + e^x y' = \cos x$ (1 p)

(b) $y'' + \sin(x)y = e^y$ (1 p)

Tehtävä 11. Yhtälöllä $y'' + y = 0$ on mm. ratkaisut $y_1(x) = \sin x$ ja $y_2(x) = \cos x$.

(a) Onko (y_1, y_2) yhtälön perusjärjestelmä? (1 p)

(b) Esitä yhtälön *kaikki* ratkaisut. (1 p)

(c) Määritä alkuehtoja $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ja $y'(\frac{\pi}{2}) = -1$ vastaava ratkaisu. (1 p)

(d) Määritä alkuehtoja $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ja $y(0) = 1$ vastaava ratkaisu. (1 p)

(Kohdan (d) opetus: alkuehdon ei tarvitse olla muodossa $y(x_0) = z_0, y'(x_0) = z_1$.)

Tehtävä 12. Tutkitaan nyt yhtälöä $y'' + y = x$.

(a) Osoita, että $y = x$ on yhtälön eräs ratkaisu. (1 p)

(b) Esitä yhtälön *kaikki* ratkaisut. (2 p)

(Vihje: Tehtäväpaperin muista tehtävistä on apua.)

Tehtävissä 13–14 $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$ tarkoittaa funktioiden y_1, y_2 Wronskin determinanttia.

Tehtävä 13. Olkoot $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ kaksi derivoituvaa funktiota avoimella välillä $I \subset \mathbb{R}$. Sanotaan, että ne ovat *lineaarisesti riippuvat*, jos on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että $y_2(x) = cy_1(x)$ kaikilla $x \in I$. Muutoin ne ovat *lineaarisesti riippumattomat*. Todista:

(a) Jos y_1, y_2 ovat lineaarisesti riippuvat, niin $W(y_1, y_2)(x) = 0$ kaikilla $x \in I$. (1 p)

(b) Jos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$, niin y_1, y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat. (1 p)

(c) Jos (y_1, y_2) on homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ perusjärjestelmä, niin y_1, y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat. (1 p)

Tehtävä 14. Tutkitaan homogeeniyhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ avoimella välillä I, missä p ja q ovat jatkuvia. Olkoot y_1 ja y_2 sen kaksi ratkaisua. Olkoon $x_0 \in I$.

Johda lauseke (nk. Abelin kaava)

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\, d\tau}\,, \quad x \in I.$$

(Vihje: Muodosta W:lle separoituva ensimmäisen kertaluvun DY ja ratkaise se.) (4 p)

(**Opetus:** $W(x_0) \neq 0$ ***jossakin*** **pisteessä** $x_0 \in I \Leftrightarrow W(x) \neq 0$ ***kaikissa*** **pisteissä** $x \in I$. Tuloksen oletuksena on tietenkin se, että y_1, y_2 ovat HY:n ratkaisuja, eli tämä ei päde mille tahansa funktioille.)