Differentiaaliyhtälöt I
2. harjoitustehtävät
(19 tehtävää, max 40 pistettä)

20. elokuuta 2014

Tehtävä 1. Onko annettu yhtälö separoituva, lineaarinen tai eksakti? Onko sillä integroiva tekijä, joka riippuu vain x:stä tai vain y:stä, joka palauttaa yhtälön eksaktiksi?

(a) $(x^2 \sin x + 4y)\,dx + x\,dy = 0$ (1 p)

(b) $(2y^3 + 2y^2)\,dx + (3y^2x + 2xy)\,dy = 0$ (1 p)

Tehtävä 2. Ratkaise $(3x^2 + y)\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$. (2 p)

Tehtävä 3. Ratkaise $(2y^2 + 2y + 4x^2)\,dx + (2xy + x)\,dy = 0$. (2 p)

Tehtävä 4. Ratkaise $(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0$. (2 p)

Tehtävä 5. Yleisesti ottaen yhtälön $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ eksaktiksi yhtälöksi palautettavan integroivan tekijän on riipputtava *sekä x:stä että y:stä.*

(a) Etsi sellaiset luvut $n, m \in \mathbb{N}$, että $\mu(x,y) = x^n y^m$ on integroiva tekijä yhtälölle $(2y^2 - 6xy)\,dx + (3xy - 4x^2)\,dy = 0$. (2 p)

(Vihje: ajatus on siis kertoa yhtälö puolittain integroivalla tekijällä ja vaatia, että lopputuloksena on eksakti yhtälö. Tehtävässä on hyvä muistaa, että osittaisderivaatoille pätee aivan tavanomainen tulon derivoimissääntö: esim. $\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}$.)

(b) Ratkaise edellisessä kohdassa saamasi eksakti yhtälö. (2 p)

Tehtävä 6. Samat alkusanat kuin edeltävässä tehtävässä. Oletetaan tällä kertaa, että $(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})/(xM - yN) = H(xy)$, eli lauseke vasemmalla puolella on määritelty ja riippuu vain tulon xy arvosta. Osoita, että yhtälöllä $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ on vain tulosta xy riippuva integroiva tekijä $\mu(xy)$ ja johda sille lauseke. (2 p)

Tehtävä 7. Luennolla esiteltiin neljä erilaista ensimmäisen kertaluvun yhtälötyyppiä, jotka voidaan palauttaa separoituvaksi, lineaariseksi tai eksaktiksi. Mitä tyyppiä annettu yhtälö on – ja millaiseksi se siis voidaan palauttaa?

(a) $(y - 4x - 1)^2 + y' = 0$ (1 p)

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \sqrt{xy} = 0$ (1 p)

Tehtävissä 8–11 harjoitellaan sijoituksia/muunnoksia, joiden avulla yhtälö ratkeaa. Tunnista kussakin tehtävässä yhtälön tyyppi ja tätä tietoa käyttäen ratkaise se.

Tehtävä 8. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+y} - 1$ (2 p)

Tehtävä 9. $x^2 + y^2 + 2xy\, y' = 0$ (2 p)

Tehtävä 10. $(x + y - 1)\, dx + (y - x - 5)\, dy = 0$ (2 p)

Tehtävä 11. $y' = y + e^{2x}y^3$ (2 p)

Tehtävä 12. Ratkaise yhtälö $y' = \frac{2y}{x} + \cos(\frac{y}{x^2})$ sijoituksella $y(x) = v(x)x^2$ (2 p)

(Huom! Yleisemminkin kannattaa etsiä sellaista sijoitusta, joilla kaikkein iljettävin termi yhtälössä yksinkertaistuu.)

Tehtävä 13. Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = x + y$, $y(1) = 1$. Arvioi ratkaisun numeerista arvoa pisteissä $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ Eulerin menetelmää käyttäen. (2 p) *(Vaatii taskulaskimen tms. käyttöä.)*

Tehtävä 14. Tarkastellaan alkuarvotehtävää $y' = y$, $y(0) = 1$. Separoimalla saadaan ratkaisuksi $y(x) = e^x$. Erityisesti siis $y(1) = e$, joten lukua e voidaan arvioida Eulerin menetelmää käyttäen.

Todista seuraava väite: Jos välillä $[0, 1]$ valitaan askelkooksi $h = \frac{1}{K}$, missä K on pisteiden $x_k = kh$ $(1 \leq k \leq K)$ lukumäärä, niin Eulerin menetelmästä seuraa kaava

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{K}\right)^K, \qquad K = 1, 2, \ldots \qquad \text{(2 p)}$$

(Huom! Voidaan osoittaa, että $e = \lim_{K\to\infty}(1 + \frac{1}{K})^K$. Yllä oleva arvio siis todella suppenee oikeaan tulokseen, kun K kasvaa eli askelkoko h pienenee).

Tehtävä 15. Käytetään luentokalvojen merkintöjä sekoitusmallille. Olkoot $V_0 = 1000$ litraa, $F_{in} = 6$ l/min, $F_{out} = 5$ l/min, $p_{in} = 1$ kg/l ja $x(0) = 0$ (tankin vesi aluksi suolatonta). Määritä tankissa olevan suolaveden pitoisuus ajan funktiona. (4 p)

Tehtävä 16. 4 m x 4 m x 2,5 m -kokoisen huoneen ilmasta on 4% häkää. Aloitetaan tuuletus niin, että huoneeseen virtaa puhdasta ilmaa nopeudella 3 m^3/min, jonka oletetaan sekoittuvan heti kaikkialle huoneilmaan. Huoneen venttiilistä poistuu samalla nopeudella saastunutta ilmaa. Kuinka kauan kestää, että häkäpitoisuus huoneessa on laskenut tasolle 0,01%? (2 p)

Tehtävä 17. USA:n väkiluku oli vuonna 1790 noin 3,93 miljoonaa ja vuonna 1890 noin 62,98 miljoonaa. Jos väestön koko noudattaisi Malthusin mallia, mikä olisi ollut väestön koko vuonna 2010? Todellinen väkiluku oli 308,74 miljoonaa; selitä havaintoasi. (1 p)

Tehtävä 18. Luennolla johdettiin logistisen yhtälön ratkaisu. Totea, että yhtälöllä on triviaaliratkaisut $N \equiv 0$ ja $N \equiv K$, missä $N \geq 0$ on populaation koko ja $K > 0$ on ympäristön kantokyky. Totea, että kaikki muut ratkaisut lähestyvät monotonisesti arvoa K, kun $t \to \infty$. (1 p)

Tehtävä 19. USA:n väkiluku oli vuonna 1790 noin 3,93 miljoonaa sekä vuosina 1840 ja 1890 noin 17,07 ja 62,98 miljoonaa. Jos väestön koko noudattaisi logistista mallia, mikä olisi ollut väestön koko vuonna 2010? Todellinen väkiluku oli 308,74 miljoonaa. (2 p)