Differentiaaliyhtälöt I
1. harjoitustehtävät
(19 tehtävää, max 40 pistettä)

6. elokuuta 2014

Tehtävä 1. Kirjoita differentiaaliyhtälönä, sopivia merkintöjä käyttäen:

(a) Bakteeripopulaation koon y muutosnopeus mielivaltaisella ajanhetkellä x on suoraan verrannollinen populaation kokoon. (Oikeasta ratkaisusta 1 piste)

(b) Kahvin lämpötilan muutosnopeus on (mieliv. ajanhetkellä) suoraan verrannollinen huoneen lämpötilan ja kahvin lämpötilan erotukseen. (1 p)

Tehtävä 2.

(a) Ratkaise alkuarvotehtävä $\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{1}{3}x^2$, $y(\pi) = 1$. (1 p)

(b) Onko alkuarvotehtävällä $y' = x^2 - xy^3$, $y(1) = 6$, yksikäsitteinen ratkaisu? (1 p)

Tehtävä 3.

(a) Onko $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$ yhtälön $y'' + y' - 2y = 0$ *yleinen ratkaisu*?[1] Tässä C_1 ja C_2 ovat vakioita. (1 p)

(b) Mikä on kolmannen kertaluvun yhtälön $y''' = 0$ yleinen ratkaisu? (1 p)

Tehtävä 4. Määrittääkö ensin mainittu relaatio sitä seuraavan differentiaaliyhtälön *implisiittiratkaisun*?

(a) $x^2 + y^2 = 4$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (1 p)

(b) $x + y + e^{xy} = 0$; $(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0$ (1 p)

[1] Ilman, että asiasta jatkossa erikseen mainitaan, vastaus tulee aina perustella.

Tehtävä 5. Onko annettu yhtälö separoituva?

(a) $(xy^2 + 3y^2)\,dy - 2x\,dx = 0$ [2] (1 p)

(b) $\frac{ds}{dt} = t\ln(s^{2t}) + 8t^2$ (1 p)

Tehtävä 6. Osoita, että yhtälö $y' = 1 + xy$ ei ole separoituva. (2 p)

Tehtävä 7. Ratkaise yhtälö $\frac{dx}{dt} = 3xt^2$. (2 p)

Tehtävä 8. Ratkaise yhtälö $y' = 3x^2(1 + y^2)$. (2 p)

Tehtävä 9. Ratkaise alkuarvotehtävä $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y+1}\cos x$, $y(\pi) = 0$. (2 p)

Tehtävä 10. Tarkastellaan yhtälöä $y' = y^{\frac{1}{3}}$.

(a) Johda yhtälölle yleinen ratkaisu separointimenetelmää käyttäen. (1 p)

(b) Lisätään yhtälöön nyt alkuehto $y(0) = 0$. Huomaa, että tällä alkuarvotehtävällä on triviaaliratkaisu $y \equiv 0$.[3] Sisältyykö triviaaliratkaisu yllä johdettuun yleiseen ratkaisuun? (1 p)

(c) Onko alkuehdolla $y(0) = 0$ triviaaliratkaisun lisäksi jokin toinen ratkaisu? Onko havainto sopusoinnussa olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen kanssa? (**Perustele hyvin! 2 p**)

Tehtävä 11. Onko annettu yhtälö separoituva, lineaarinen, sekä että, vai ei kumpaakaan?

(a) $x^2y' + \sin x - y = 0$ (1 p)

(b) $\frac{dx}{dt} + xt = e^x$ (1 p)

Tehtävä 12. Ratkaise yhtälö $y' - y - e^{3x} = 0$. (2 p)

Tehtävä 13. Ratkaise yhtälö $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-4x} - 4y$. (2 p)

Tehtävä 14. Ratkaise alkuarvotehtävä $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} + 2 = 3x$, $y(1) = 1$. (2 p)

[2] Usein differentiaaliyhtälö ilmaistaan tällaisessa muodossa, ikäänkuin differentiaaleja dx ja dy voisi käsitellä yhtälössä tavallisten lukujen tapaan.

[3] Merkintä $\equiv$ tarkoittaa ”identtisesti yhtäsuuri”. Toisin sanoen $y \equiv 0 \Leftrightarrow y(x) = 0\ \forall x$.

Tehtävä 15. (Hieman teoriaa) Tarkastellaan yleistä 1. kertaluvun lineaarista yhtälöä $y' + p(x)y = q(x)$ (LY standardimuodossa).

(a) Johda *homogeeniyhtälön* (HY) $y' + p(x)y = 0$ yleinen ratkaisu $\boxed{y_0(x) = \dfrac{C}{\mu(x)}}$, $C \neq 0$, *separointimenetelmällä.* Tässä

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

on ennestään tuttu *integroiva tekijä*! Huomaa, että sallimalla myös $C = 0$ saadaan ainoa triviaaliratkaisu $y \equiv 0$ liitettyä yleiseen ratkaisuun $y_0(x)$. (1 p)

(b) Tarkista, että funktio $\boxed{y_1(x) = \dfrac{1}{\mu(x)} \displaystyle\int \mu(x)\, q(x)\, dx}$ on LY:n yksittäisratkaisu. (1 p)

Totea, että $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_1(x)}$ on luennolla johdettu LY:n yleinen ratkaisu!
Siis: **LY:n yleinen ratkaisu = HY:n yleinen ratkaisu + jokin LY:n erityisratkaisu.**

Tehtävä 16. Onko annettu yhtälö eksakti?

(a) $(\frac{1}{x} + 2y^2x)\,dx + (2yx^2 - \cos y)\,dy = 0$ (1 p)

(b) $[2x + y\cos(xy)]\,dx + [x\cos(xy) - 2y]\,dy = 0$ (1 p)

Tehtävä 17. Ratkaise yhtälö $e^x(y - x) + (1 + e^x)y' = 0$. (2p)

Tehtävä 18. Ratkaise alkuarvotehtävä $ye^{xy} - \frac{1}{y} + (xe^{xy} + \frac{x}{y^2})y' = 0$, $y(1) = 1$. (2 p)

Tehtävä 19. Totea, että yhtälö $(y^2 + 2xy)\,dx - x^2\,dy = 0$ *ei* ole eksakti, mutta muuttuu eksaktiksi, jos se kerrotaan puolittain tekijällä y^{-2}. Ratkaise saatu eksakti yhtälö ja käytä tulosta alkuperäisen yhtälön ratkaisemiseksi. Onko alkuperäisellä yhtälöllä muitakin ratkaisuja? (2 p)