3.5, 3.6

(a) Olk. A, B erillisiä, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia

Väite: $m^*(A \cup B) = m^*(A) \cup m^*(B)$.

<u>Tod</u>: $m^*(A \cup B) = m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \setminus A)$

$= m^*(A) + m^*(B)$.

$\square$ 1

(b) Ol. $m^*(E) = 0$, väite $m^*(A \cap E) = 0 \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n$

Tällöin, koska $A \cap E \subset E$, niin monotonisuuden nojalla $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$

$\Rightarrow m^*(A \cap E) = 0$ 1

(c) Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva. Väite: $m^*(A) = 0$.

A numeroituva $\Rightarrow A = \{x_i \in \mathbb{R}^n \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Valitaan kullekin $x_i \in A$ peite, olk. $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{F}_i = \Big\{ \underbrace{\Big]x_{i1} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\tfrac{\varepsilon}{2^i}},\ x_{i1} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\tfrac{\varepsilon}{2^i}}\Big[\times \cdots \times \Big]x_{in} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\tfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}},\ x_{in} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\tfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}}\Big[}_{I_i} \Big\}$$

jolle $l(I_i) = \left(\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2^i}}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2^i}$, joten

$s(\mathcal{F}) = s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i\right) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2\varepsilon \to 0$, kun $\varepsilon \to 0$,

joten $m^*(A) = 0$.

Väite:
(d) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ on mitallinen.

Tod: $\mathbb{Q}$ on nollamittainen, ja $\mathbb{R}$ on mitallinen.
mitallinen

Nyt $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ on mitallinen, joten Tehtävän 3.2 (a)-kohdan nojalla $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ on mitallinen. $\square$

(e) Olk. $A, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$

Väite: $(A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2) = A\cap(E_1\cup E_2)$.

Tod: $(A\cap E_1)\cup(A\cap(E_1^c\cap E_2))$

$$= A\cap\underbrace{(E_1\cup(E_1^c\cap E_2))} = A\cap(E_1\cup E_2)$$

$$E_1\cup(E_1^c\cap E_2)$$
$$=\underbrace{(E_1\cup E_1^c)}_{\mathbb{R}^n}\cap(E_1\cup E_2) = E_1\cup E_2$$
$\square$

(f) Ol. $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ on jono joukkoja

Määr. $F_1 = E_1$ ja $F_{n+1} = E_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n} E_i$

(i) Väite $F_i\cap F_j=\emptyset \quad \forall\ i\neq j$

Olk. $i<j$

$$F_i = E_i\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}E_k, \quad F_j = E_j\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}E_k$$

Nyt $\left(E_i\setminus\bigcup_{k=1}^{i-1}E_k\right)\cap\left(E_j\setminus\bigcup_{k=1}^{j-1}E_k\right)$

$$= E_i\cap\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}E_k^c\right)\cap E_j\cap\left(\bigcap_{k=1}^{j-1}E_k^c\right)$$

$$= E_i\cap\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}E_k^c\right)\cap E_j\cap E_i^c\cap\bigcap_{k=1}^{i-1}E_k^c\cap\bigcap_{k=i+1}^{j-1}E_k^c = \emptyset$$

.5, 3.6

(ii) Väite: $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$

Tod: Heti konstruktiosta

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Ol. $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Olkoon n pienin indeksi jolla $x \in E_n$

Nyt $x \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$, siten $x \in E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = F_n$, joten

$\in \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. $\square$

60 p

(g) V

(i) Olk. $I \subset \mathbb{R}$ avoin väli, $I =]a, b[$

Väite: $\ell(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(x)dx$

Tod: $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_I(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \chi_I(x)dx + \int_{a}^{b} \chi_I(x) + \int_{b}^{\infty} \chi_I(x)dx$

$$= \int_a^b \chi_I(x)dx = \int_a^b 1 dx = b-a.$$

(ii) Olkoon $\mathcal{F}$ joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ äärellinen peite.

Väite. $\sum_{I \in \mathcal{F}} \chi_I(x) \geq 1 \quad \forall x \in A$.

Olk. $x \in A$. Nyt $x \in I$ jollakin $I \in \mathcal{F}$ siten $\chi_I(x) = 1$. Koska $\chi_{I'}(x) \geq 0$ kaikilla $I' \in \mathcal{F}$,

niin $1 = \chi_I(x) \leq \sum_{I \in \mathcal{F}} \chi_I(x)$ $\square$