2.6

Olk. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ jono $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja.

(a) Väite: $m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \inf\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$.

Tod: Vastaväite: $m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) > \inf\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$.

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$ sellainen, että

$m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) > \inf\{m_n^*(A_k) \mid k\in\mathbb{N}\} + \varepsilon$, jolloin

on olemassa sellainen $k\in\mathbb{N}$, että

$m_n^*(A_k) < \inf\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\} + \varepsilon$.

Koska $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset A_k$, niin monotonisuuden nojalla

nyt $m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) > \inf\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\} + \varepsilon > m_n^*(A_k) \geq m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$,

mikä on ristiriita

Siis $m_n^*\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \leq \inf\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$ $\square$

(b) Väite: $m_n^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \geq \sup\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$

Tod: V-O: Pätee $<$.

Nyt olkoon $\varepsilon > 0$ sellainen, että

$m_n^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) < \sup\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\} - \varepsilon$, jolloin

on olem. sellainen $k\in\mathbb{N}$, että $m_n^*(A_k) > \sup\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\} - \varepsilon$.

Koska $A_k \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, niin monotonisuuden nojalla

$$m_n^*\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) < \sup\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\} - \varepsilon$$

$$< m_n^*(A_k) \leq m_n^*\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big),$$ mikä

on ristiriita.

Siten $m_n^*\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \geq \sup\{m_n^*(A_i) \mid i\in\mathbb{N}\}$. $\square$

5