2.2

Ol. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on bijektio.

(a) Väite: Kaikilla $A, B \subset \mathbb{R}^n$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

$x \in f(A \cap B)$

$\iff x = f(y)$ jollakin $y \in A \cap B$

$\iff x = f(y)$ jollakin $y \in A$ ja $y \in B$

$\iff x = f(y)$ ja $f(y) \in fA$ ja $f(y) \in fB$

$\iff x \in fA \cap fB$

$ff^{-1}A \subset A$

(b) Ol. lisäksi, että kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$

$m_n^*(fA) = m_n^*(A)$.

Väite: Jos X on mitallinen, niin fX on mitallinen.

Tod: Funktio f bij. $\Rightarrow$ on olemassa käänteisfunktio

$f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$

Bijektiolle $ff^{-1}A = f^{-1}fA = A$ ja $(fX)^c = fX^c$

Nyt $m_n^*(A \cap fX) + m_n^*(A \cap (fX)^c)$

$= m_n^*(ff^{-1}A \cap fX) + m_n^*(ff^{-1}A \cap (fX^c))$

$= m_n^*(f(f^{-1}A \cap X)) + m_n^*(f(f^{-1}A \cap X^c))$

$$= m_n^*(f^{-1}A \cap X) + m_n^*(f^{-1}A \setminus X)$$

$$= m_n^*(f^{-1}A) = m_n^*(ff^{-1}A) = m_n^*(A).$$

Siten fX on mitallinen. $\square$

5