Mitta ja integraali – Viikko 4

Ti 12.06.2012

2.1 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 \leqslant f \leqslant 1$. Oletetaan lisäksi, että $f(x) = 0$ kun $x \notin [0,1]^n$. Osoita, että $\int f \leqslant 1$.

Ratkaisu: Kuvaus f on mitallinen, ei-negatiivinen ja ($\mathbb{R}^n$ mitallinen). Joukko $[0,1]^n$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuna osajoukkona mitallinen, jolloin erityisesti kuvaus $\chi_{[0,1]^n}$ on mitallinen. Lisäksi kuvaus $\chi_{[0,1]^n}$ on ei-negatiivinen ja

$$f \leq \chi_{[0,1]^n}.$$

Siten väite pätee lauseen [3.18] (1) nojalla.

2.2 Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yksinkertaisia ja oletetaan, että

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että $I(f) \leqslant I(g)$. (Vihje: 3.12)

Ratkaisu: Merkitään

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}.$$

Tällöin A on 0-mittaisena joukkona mitallinen ja joukko $\mathbb{R}^n \setminus A$ mitallisen joukon komplementtina mitallinen. Koska joukko $\mathbb{R} \setminus A$ on mitallinen ja joukon A määritelmän nojalla $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus A$ pätee lauseen [3.12] (1) nojalla

$$I(f, \mathbb{R} \setminus A) \leq I(g, \mathbb{R} \setminus A).$$

Koska joukko A on nollamitallinen pätee lauseen [3.12] kohdan (3) nojalla

$$I(f, A) = 0 = I(g, A).$$

Siten saadaan

$$I(f) = I(f, A) + I(f, \mathbb{R} \setminus A) \leq I(g, A) + I(g, \mathbb{R} \setminus A) \leqslant I(g).$$

2.3 (a) Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen ja $m(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$. Osoita, että $I(f) > 0$

(b) Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $m(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$. Osoita, että $\int f > 0$

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$ ja $a > 0$, että

$$m(\{x \mid f(x) > 1/n\}) > 0.$$

Tehdään vastaoletus, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$m(\{x \mid f(x) > 1/n\}) = 0.$$

oletuksen nojalla f on mitallinen kuvaus. Siten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ joukko $A_n =: \{x \mid f(x) > 1/n\}$ on mitallisen kuvauksen määritelmän nojalla avoimen joukon alkukuvana mitallinen. Lisäksi $A_n \subset A_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n.$$

Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla pätee siten

$$m(\{x \mid f(x) > 0\}) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} A_k = 0,$$

mikä on ristiriita. Siten on olemassa sellainen $k \in \mathbb{N}$ ja $a > 0$, että $m(\{x \mid f(x) > 1/k\}) = a$.

(a) Olkoon $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolle pätee $f_k(x) = 1/k$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kuvaus f_k on yksinkertainen. Koska nyt joukko A_k on mitallinen ja

$$I(f_k, A_k) = m(A_k) \cdot 1/k = a/k,$$

saadaan lauseiden [3.7] ja [3.12] nojalla

$$\begin{aligned} 0 < a/k &= m(A_k) \cdot 1/k = I(f_k, A_k) \\ &\le I(f, A_k) \le I(f, A_k) + I(f, \mathbb{R}^n \setminus A_k) = I(f). \end{aligned}$$

(b) On oletettava, että $f \ge 0$. Vastaesimerkiksi käy muuten sellainen mitallinen kuvaus $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = -1$ kaikilla $x \in [-2, -1]$, $f(x) = 1$ kaikilla $x \in [1, 2]$ ja $f(x) = 0$ muutoin, sillä

$$m(\{x \mid f(x) > 0\}) = m([1, 2]) = 1$$

ja

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = 1 - 1 = 0.$$

Lebesguen integraalin määritelmän nojalla

$$\int f = \sup\{I(g) \mid g \text{ on yksinkertainen ja } g \le f\}.$$

Olkoon $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kuvaus kuten kohdassa (a). Lauseen [3.17] nojalla joukon A_k mitallisuudesta ja kuvauksen f_k yksinkertaisuudesta seuraa, että $I(f_k) = \int f_k$, jolloin lauseen [3.18] nojalla saadaan

$$0 < \int_{A_k} f_k \leq \int_{A_k} f \leq \int f.$$

2.4 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio ja $f \geqslant 0$. Oletetaan lisäksi, että $a = m(\{x \mid f(x) > 1\}) > 0$. Osoita, että $\int f \geqslant a$.

Ratkaisu: Lebesguen integraalin määritelmän nojalla

$$\int f = \sup\{I(g) \mid g \text{ on yksinkertainen ja } g \leq f\}.$$

Supremumin määritelmän nojalla kaikilla yksinkertaisilla kuvauksilla g, joille pätee $g \leq f$ pätee $\int f \geq I(g)$. Olkoon $A = \{x \mid f(x) > 1\}$. Tällöin $\chi_A \leq f$. Lisäksi $A = f^{-1}\,]1, \infty]$, jolloin A on mitallisen kuvauksen määritelmän nojalla avoimen joukon alkukuvana mitallinen. Siten kuvaus χ_A on (mitallisena) kuvauksena yksinkertainen ja pätee

$$a = m(A) = I(\chi_A) \leq \int f.$$

2.5 Myös ei-mitalliselle funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä

$$\int^* f = \sup\{I(g) \mid g \in Y, g \leqslant f\}.$$

Kuitenkin edellisen tehtävän (2.4) väite ei välttämättä päde, jos f ei ole mitallinen. Jos teit edellisen tehtävän, niin missä kohtaa todistusta käytit funktion f mitallisuutta?

Ratkaisu: Kts. Ratkaisu 2.4.

2.6 (Oleellisesti tehtävät 1.4 ja 2.2 integraalille):

(a) Oletetaan, että $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja että $A \setminus B$ on nollamittainen. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että $\int_A f \leqslant \int_B f$. (Vihje: 3.18)

(b) Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallisia ja oletetaan, että

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että $\int f \leqslant \int g$. (Vihje: 3.18)

Ratkaisu:

(a) Vastaesimerkki: Jos $A = B \subset \mathbb{R}$ on ei-mitallinen joukko, niin $A \setminus B = \varnothing$ on nollamittainen, mutta integraali $\int_A f$ ei ole määritelty. Siten on ainakin oletettava, että joukot A ja B ovat mitallisia, jolloin integraalit ovat määriteltyjä ja joukko $A \cap B$ on mitallinen. Oletaan lisäksi, että $f \geq 0$. Oletuksen nojalla $A \setminus B$ nojalla nollamittaisena joukkona mitallinen. Lauseen [3.18] nojalla pätee

$$\int_A f = \int_{A\cap B} f + \int_{A\setminus B} f = \int_{A\cap B} f + 0 \leq \int_B f,$$

koska $A \cap B \subset B$ ja $m(A \setminus B) = 0$.

(b) Oletetaan, että $f, g \geq 0$. Tällöin oletuksesta seuraa $g \geq f$, jolloin väite seuraa lauseen [3.18] kohdasta (1).