Ti 05.06.2012

2.1 (Kertausta.) Osoita, että funktiolle $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(a) f on kaikkialla jatkuva, eli kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että $fB(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

(b) Jokaisen avoimen joukon V alkukuva $f^{-1}V$ on avoin.

(c) Jokaisen suljetun joukon W alkukuva $f^{-1}W$ on suljettu.

2.3 Anna esimerkki

(a) (1p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka ei ole mitallinen (vihje: L.1.68).

(b) (2p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen, mutta ei jatkuva,

(c) (2p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja kompaktista joukosta $C \subset \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen ja fC ei ole kompakti.

Ti 5.6. 2012, Ratkaisuehdotuksia Martina Aaltonen

2.1 (Kertausta.) Osoita, että funktiolle $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(a) f on kaikkialla jatkuva, eli kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että $fB(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

(b) Jokaisen avoimen joukon V alkukuva $f^{-1}V$ on avoin.

(c) Jokaisen suljetun joukon W alkukuva $f^{-1}W$ on suljettu.

Ratkaisu:

(b)→ (a) $B(f(x),\epsilon)$ on avoin kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$ ja $\epsilon \in \mathbb{R}$, joten oletuksesta (b) seuraa, että $f^{-1}B(f(x),\epsilon)$ on avoin. Erityisesti $x \in f^{-1}B(f(x),\epsilon)$. Siten avoimuuden nojalla pisteellä $x \in \mathbb{R}^n$ on kuulaympäristö $B(x,\delta)$, jolle pätee $B(x,\delta) \subset f^{-1}B(f(x),\epsilon)$. Tällöin erityisesti

$$fB(x,\delta) \subset B(f(x),\epsilon).$$

(a)→ (c) Olkoon $F \subset \mathbb{R}^m$ suljettu. Tällöin joukko $U = \mathbb{R}^m \setminus F$ on avoin ja siten kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, joilla $f(x) \in U$, on olemassa sellainen $B(f(x),\epsilon)$, että $B(f(x),\epsilon) \subset U$. Oletuksesta (a) seuraa tällöin, että on olemassa kuulaympäristö $B(x,\delta)$, jolle pätee $fB(x,\delta) \subset B(f(x),\epsilon) \subset U$, jolloin erityisesti

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}B(f(x),\epsilon) \subset f^{-1}U.$$

Siten kaikilla $x \in f^{-1}U$ on olemassa kuulaympäristö, joka sisältyy joukkoon $f^{-1}U$, joten joukko $f^{-1}U$ on avoin, jolloin komplementti

$$f^{-1}F = \mathbb{R}^m \setminus f^{-1}U$$

on suljettu.

(c) → (b) Olkoon $U \in \mathbb{R}^m$ avoin. Tällöin $F := \mathbb{R}^m \setminus U$ on suljettu, jolloin kohdan (c) nojalla $f^{-1}[F]$ on suljettu. Siten avoimen joukon komplementtina joukko

(b) (2p) kuvauksesta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen, mutta ei jatkuva,

(c) (2p) kuvauksesta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja kompaktista joukosta $C \subset \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen ja fC ei ole kompakti.

Ratkaisu: (a) Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ei-mitallinen joukko. Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto 0, \text{ kaikilla } x \in E$$

$$x \mapsto 1, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus E.$$

Tällöin $f^{-1}B(0, 1/2) = E$, ja kuula $B(0, 1/2)$ on avoin. Siten kuvaus f ei ole mitallinen.

(b) Olkoon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto 0, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto 1, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+.$$

Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$, joilla $0, 1 \in U$ pätee $f^{-1}U = \mathbb{R}$.

Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$, joilla $1 \in U$ ja $0 \notin U$ pätee $f^{-1}U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$.

Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$, joilla $0 \in U$ ja $1 \notin U$ pätee $f^{-1}U = \mathbb{R}_+$.

Kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$, joilla $1, 0 \notin U$ pätee $f^{-1}U = \varnothing$.

Joukot $\mathbb{R}$ ja $\varnothing$ ovat avaruuden $\mathbb{R}$ avoimina joukkoina mitallisia. Joukko $\mathbb{R}_+$ on osoitettu aiemmassa tehtävässä mitalliseksi ja koska mitalliset joukot muodostavat σ-algebran, on myös komplementti $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$ mitallinen. Siten jokaisen avoimen joukon alkukuva on mitallinen, joten mitallisen kuvauksen määritelmän nojalla kuvaus f on mitallinen.

(c) Olkoon $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto 1, \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \,]0, 1]$$

$$x \mapsto x, \text{ kaikilla } x \in \,]0, 1].$$

Tällöin $f[0, 1] = \,]0, 1]$, missä $[0, 1]$ on (metrisen avaruuden) suljettuna ja rajoitettuna joukkona kompakti ja $]0, 1]$ ei ole kompakti, koska joukko $]0, 1]$ ei ole suljettu $\mathbb{R}$:ssä. Kuvaus $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$x \mapsto 0$ kaikilla $x \leq 0$,

$x \mapsto x$ kaikilla $0 \leq x \leq 1$,

$x \mapsto 1$ kaikilla $x \geq 1$,

on jatkuva kuvauksena mitallinen. Olkoon f kuten kohdassa (b). Tällöin $h = f + g$, jolloin se erityisesti on kahden mitallisen kuvauksen summakuvauksena mitallinen.

2.4 (a) (2p) Osoita (tarkemmin, kuin monisteen Esimerkissä 2.8), että jos joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ karakteristinen funktio on mitallinen, niin E on mitallinen.

(b) (3p) Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat mitallisia, niin funktioiden tulo fg, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, on mitallinen (Lause 2.11).

Ratkaisu: (a) Oletuksen nojalla karakteristinen funktio χ_E on mitallinen, joten määritelmän nojalla avoimen joukon alkukuva on mitallinen. Siten $\chi_E^{-1} B(1, \frac{1}{2}) = E$ on avoimen joukon alkukuvana mitallinen.

(b) Lauseen [2.10] nojalla kuvaus $h\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $h = (f, g)$ on mitallinen, koska kuvaukset f ja g ovat mitallisia. Lisäksi tulokuvaus $t\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva. Siten yhdistetty kuvaus $fg = (t \circ h)$ on lauseen [2.9] nojalla mitallinen.

2.5 (Tätä olemme jo käyttäneet monta kertaa). Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}$. Oletetaan, että kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten että $a < b + \varepsilon$. Osoita, että $\inf A \leqslant \inf B$. (Vrt. esim. Huomautus 1.7(3), Lemma 1.37, Lemma 1.39...)

ratkaisu Riitää osoittaa kaikilla $\delta > 0$ on olemassa sellainen $a \in A$, että

$$|a - \inf B| < \delta.$$

Infimumin määritelmän nojalla on olemassa sellainen $b \in B$, että $|\inf B - b| < \delta/2$ ja oletuksen nojalla on olemassa sellainen $a \in A$, että $|b-a| < \delta/2$. Kolmioepäytälön nojalla

$$|\inf B - a| \leq |\inf B - b| + |b - a| = \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Siten

$$\inf A \leq \inf B.$$

2.6 Osoita, että seuraavissa f on mitallinen kuvaus:

(a) (1p) $f(x)$ on reaaliluvun x kokonaislukuosa, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(b) (2p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f(x) = x^2$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja 0 muulloin,

(c) (2p) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mikä tahansa kuvaus ja $g(x) = f(x)$, kun $x^2 \in \mathbb{Z}$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x}$ muuten.

Ratkaisu: (a) Analyysi 1 nojalla $0,99999\ldots = 1$ kaikilla joten $f(1) = 0$ ja $f(1) = 1$. Siten f ei ole kuvaus.

Osoitetaan ensin, että jos f mielivaltainen kuvaus, joka saa arvon 0 paitsi 0-mittaisessa joukossa A, niin f on mitallinen. Olkoon siten U avoin $\mathbb{R}$:ssä. Osoitetaan, että joukon U alkukuva on mitallinen:

i jos $0 \notin U$, niin $f^{-1}U \subset A$, jolloin $f^{-1}U$ on 0-mittaisen joukon osajoukkona 0-mittainen.

ii jos $0 \in U$, niin kohdan i nojalla, jollakin mitallisella $B \subset \mathbb{R}$ pätee

$$f^{-1}U = f^{-1}[U \setminus \{0\}] \cup f^{-1}\{0\} = B \cup (\mathbb{R} \setminus A).$$

Mitalliset joukot muodostavat σ-algebran, joten ensinnäkin $\mathbb{R} \setminus A$ on mitallisen joukon komplementtina mitallinen ja toisaalta tällöin $B \cup \mathbb{R} \setminus A$ on mitallisten joukkojen yhdisteenä mitallinen. Kaikilla joukon $\mathbb{R}$ avoimilla joukoilla U pätee $0 \in U$ tai $0 \notin U$. Siten on osoitettu, että kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}$ alkukuva $f^{-1}U$ on mitallinen, jolloin kuvaus f on määritelmän nojalla mitallinen.

(b) Joukko $\mathbb{Q}$ on 0-mittainen, joten pätee (b).

(c) Olkoot kuvaukset $h_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ määritelty seuraavasti:

$h_1(x) = -\sqrt[3]{x}$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$ ja $h_1(x) = 0$ muuteen,
$h_2(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$ ja $h_2(x) = 0$ muuteen,
$h_3 = \sqrt[3]{x}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tällöin osoitetun nojalla kuvaukset h_1 ja h_2 ovat mitallisia. Lisäksi kuvaus h_3 on jatkuvana kuvauksena mitallinen. Erityisesti

$$g = h_3 + h_2 + h_1,$$

on siten mitallisten kuvausten summana mitallinen.