Mitta ja Integraali

kesä 2011

muistilista

Jan Cristina

2012 Edition by Vadim Kulikov

1. Olkoon $U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}$ joukkoperhe. Määritellään

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = \{x : \text{on olemassa } \alpha \in \mathcal{A} \text{ siten, että } x \in U_\alpha\} \qquad \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = \{x : \text{kaikille } \alpha \in \mathcal{A}\ x \in U_\alpha\}.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Piste $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ on A:n *yläraja*, jos kaikille $x \in A$ $y \geq x$. Piste z on A:n *alaraja*, jos kaikille $x \in A$ $z \leq x$. Joukon A *supremum*, merk. $\sup A$ on A:n pienin yläraja, eli se on A:n yläraja ja jos w on A:n yläraja, niin $\sup A \leq w$. $\inf A$ on A:n suurin alaraja, eli se on A:n alaraja ja jos w on A:n aläraja, niin $\inf A \geq w$.

3. Joukko X on *numeroituva*, jos on olemassa injektio $f : A \to \mathbb{N}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa surjektio $f\colon \mathbb{N} \to A$, eli toisin sanoin on olemassa numerointi $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Jos joukko ei ole numeroituva, sanotaan sen olevan *ylinumeroituva*.

   (a) Äärelliset joukot ovat numeroituvia

   (b) Numeroituva yhdiste numeroituvia joukkoja on numeroituva, eli jos joukot $A_1, A_2, \ldots$ ovat kaikki numeroituvia, niin
   $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
   on numeroituva.

   (c) $\mathbb{N}^k$ ja $\mathbb{Q}^k$ ovat numeroituvia kaikille $k \in \mathbb{N}$.

   (d) $[0, 1]$ on ylinumeroituva.

   (e) Jos A on ääretön, niin sen potenssijoukko $P(A)$ on ylinumeroituva.

4. Olk. $A \subset \mathbb{R}^n$. Silloin A:n n-ulotteinen *Lebesgue'n ulkomitta* on $m_n^*(A) := \inf\{\mathcal{S}(\mathcal{F}) : \mathcal{F}$ on A:n Lebesgue:n peite$\}$.

   (a) $\mathcal{F}$ on A:n Lebesgue:n peite jos se on numeroituva perhe avoimia n-välejä, siten että
   $$A \subset \bigcup_{I\in\mathcal{F}} I = \bigcup \mathcal{F}$$

   (b) $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \sum_{I\in\mathcal{F}} l(I)$, missä $l(]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$.

5. Ulkomitalla on seuraavat ominaisuudet

   (a) $m^*(\varnothing) = 0$

   (b) Jos $A \subset B$ niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.

   (c) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

6. $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos $\forall A \subset \mathbb{R}^n$

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

   joka on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

   koska toinen suunta seuraa subadditiivsuudesta (5(c) yllä).

   (a) Jos $E_1, E_2, \ldots$ ovat mitallisia, seuraavat joukot ovat mitallisia

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i, \quad E_i \setminus E_j, \quad E_i^c.$$

   (b) Jos $m^*(A) = 0$ niin A on mitallinen. Jos A on avoin tai suljettu niin se on mitallinen.

   (c)

7. Funktio $f : A \to \mathbb{R}^m$ on mitallinen jos kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}G := \{x : f(x) \in G\} \text{ on mitallinen.}$$

   (a) Funktio $f : A \to \dot{\mathbb{R}}\,(= \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$ on mitallinen jos kaikilla avoimilla $G \subset \mathbb{R}$, alkukuva $f^{-1}G$ on mitallinen, ja $f^{-1}\{-\infty\}$ ja $f^{-1}\{\infty\}$ ovat mitallisia.

   (b) Tämä on yhtäpitävä seuraavien keskenään yhtäpitävien ehtojen kanssa:

      i. $\forall a \in \mathbb{R}\ f^{-1}([-\infty, a])$ on mitallinen,
      ii. $\forall a \in \mathbb{R}\ f^{-1}([-\infty, a[)$ on mitallinen,
      iii. $\forall a \in \mathbb{R}\ f^{-1}([a, \infty])$ on mitallinen,
      iv. $\forall a \in \mathbb{R}\ f^{-1}(]a, \infty])$ on mitallinen.

   (c) Jos $f_1, f_2, \ldots : A \to \dot{R}$ ovat mitallisia, niin seuraavat funktiot ovat mitallisia

$$f_i + f_j \text{ (mikäli määritelty)} \quad f_i \cdot f_j \quad \sup_{i \geq 0} f_i \quad \inf_{i \leq 0} f_i \quad \limsup_{i \to \infty} f_i \quad \liminf_{i \to \infty} f_i.$$

   (d) Jos $f \colon A \to B \subset \mathbb{R}^k$ on mitallinen ja $g : B \to \mathbb{R}^m$ on jatkuva niin $g \circ f$ on mitallinen.

   (e) Jos $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}(\text{tai } \mathbb{R}^m)$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja $f \restriction_{B_i}$ on mitallinen kaikille i, niin f on mitallinen.

8. Sanotaan että ominaisuus $P(x)$ pätee melkein kaikille (m.k.) $x \in E$ jos on olemassa $E' \subset E$ siten, että $m(E \setminus E') = 0$ ja kaikille $x \in E'$ pätee ominaisuus $P(x)$.

- Esimerkiksi $f = g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ melkein kaikialla ($f \overset{m.k.}{=} g$) jos on olemassa $A' \subset A$ siten, että $m^*(A \setminus A') = 0$, ja $f \restriction_{A'} = g \restriction_{A'}$.

9. Funktio $f : \mathbb{R}^n \to f$ on yksinkertainen jos
   (a) f on mitallinen.
   (b) $f \geq 0$
   (c) f saa äärellisen monta arvoa.

10. Yksinkertaisen funktion normaali esitys on $f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$ missä $A_i = f^{-1}\{a_i\}$ ja f:n kuvajoukko on $\{a_1, \dots, a_k\}$. Tällöin $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$ aina kun $i \neq j$.

11. Yksinkertaisen funktion f yksinkertainen integraali on
$$I(f) := \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \quad I(f, E) := I(f\chi_E).\ (E \text{ mitallinen})$$
   (a) $I(f + g) = I(f) + I(g)$
   (b) $a > 0 \Rightarrow I(af) = aI(f)$
   (c) $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$
   (d) $E \subset F \Rightarrow I(f, E) \leq I(f, F)$
   (e) $m(E) = 0 \Rightarrow I(f, E) = 0$
   (f) Olkoon $f \geq 0$ mitallinen funktio tällöin on olemassa kasvava jono yksinkertaisia funktioita $\varphi_i \nearrow f$.

12. Jos $f \geq 0$ on mitallinen funktio määritellään
$$\inf f := \sup\{I(\varphi) : \varphi \leq f \text{ ja } \varphi \text{ on yksinkertainen}\} \qquad \int_E f := \int f\chi_E \ (E \text{ mitallinen})$$
   (a) $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$
   (b) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$
   (c) $f(x) = 0$ kaikille $x \in E \Rightarrow \int_E f = 0$.
   (d) $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$
   (e) $0 \leq a < \infty \Rightarrow \int_E af = a \int_E f$.
   (f) $\int_E f + g = \int_E f + \int_E g$.
   (g) Jos E on rajoitettu ja f on Riemann integroituva yli E (ja tällöin rajoitettu), niin
$$\int_E f = \text{Riemann} \int_E f.$$
   (h) Jos $f \geq 0$ on mitallinen ja $\int_E f = 0$ niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in E$.
   (i) jos $f(x) = g(k)$ m.k. $x \in E$ niin $\int_E f = \int_E g$

13. Olkoon $f : A \to \dot{\mathbb{R}}$. $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ ja $f^-(x) := -\min\{0, f(x)\}$. $f = f^+ - f^-$ $|f| = f^+ + f^-$. f on integroituva yli $E \subset A$ jos se on mitallinen ja $\int_E f^+ < \infty$ ja $\int_E f^- < \infty$. Tällöin
$$\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-.$$
   (a) f on integroituva yli E jos ja vain jos se on mitallinen ja $\int_E |f| < \infty$.
   (b) Jos f ja g ovat integroituvia, niin $f + g$ on integroituva ja
   $$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g.$$
   (c) Jos $\lambda \in \mathbb{R}$ ja f integroituva, niin λf on integroituva ja
   $$\int_E \lambda f = \lambda \int_E f.$$
   (d) $f \leq g \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$.
   (e) $m(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0$
   (f) $f(x) = g(x)$ m.k. $x \in E \Rightarrow \int_E f = \int_E g$.

14. Konvergenssilauseet. Tällöin voidaan vaihtaa $\int$:n ja lim:n paikat:
   (a) MKL (kasvava): Olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$ ja $0 \leq f_i \leq f_{i+1}$. Silloin
   $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i$$
   (b) MKL (laskeva): Olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$ ja $\infty > f_i \geq f_{i+1}$. Silloin
   $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i$$
   (c) Fatou: Olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$, $0 \leq f_i$. Silloin
   $$\int_E \liminf_{i\to\infty} f_i \leq \liminf_{i\to\infty} \int_E f_i.$$
   (d) DKL: Olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia ja $g : A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituva siten, että $|f_i| \leq g$ kaikilla i. Silloin jos tarvitut raja-arvot ovat olemassa, niin
   $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i.$$
   (e) TRKL: olkoot $f_i : A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituvia ja on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $|f_i| \leq a$ kaikille i. Silloin jos kyseiset raja-arvot ovat olemassa, niin
   $$\int_E \lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} \int_E f_i.$$