1.4 Oletetaan, että $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja että $A \setminus B$ on nollamittainen. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yksinkertainen. Osoita, että $I(f, A) \leqslant I(f, B)$. (Vihje: 3.12)

Ratkaisu: Olkoon $f = \sum_{i=i}^{k} e_i \chi_{E_i}$ normaaliesitys, jossa $E_i = f^{-1}\{e_i\}$ kaikilla $e_i \in f\mathbb{R}^n$ ja $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \mathbb{R}^n$.

$$I(f, A) = I(f\chi_A)$$

$$= \sum_{i=i}^{k} e_i m(E_i \bigcap A) \text{ || Carathéodoryn ehto}$$

$$= \sum_{i=i}^{k} e_i(m(E_i \bigcap A \bigcap B) + m((E_i \bigcap A) \setminus B)) \text{ || } m((E_i \bigcap A) \setminus B) \leq m(A \setminus B) = 0$$

$$= \sum_{i=i}^{k} e_i(m(E_i \bigcap A \bigcap B) + 0) \text{ || } E_i \bigcap A \bigcap B \subset E_i \bigcap B$$

$$\leq \sum_{i=i}^{k} e_i m(E_i \bigcap B)$$

$$= I(f\chi_B) = I(f, B) \quad \square$$

1.5 Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava ja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että yhdistetty funktio $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen. (Vrt. Vko 3 teht. 3.1.(d))

Ratkaisu: Tavoitteena on käyttää lausetta 2.12. Olkoon $a \in \mathbb{R}$, tutkitaan g alkukuvaa joukosta $]a, \infty]$. Riippuen g:stä, $B = g^{-1}\,]a, \infty]$ on joko tyhjä, rajoitettu tai rajoittamaton väli (avoin, suljettu tai puoliavoin). Tyhjän joukon alkukuva on aina tyhjä joukko. Välit ovat Borel-joukkoja, joten lauseesta 2.6. seuraa että $f^{-1}B$ on mitallinen.

$$(g \circ f)^{-1}\,]a, \infty] = f^{-1}(g^{-1}\,]a, \infty]) = f^{-1}B$$

Lause 2.12 $\Rightarrow$ $g \circ f$ mitallinen.

1.6 Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Oletetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita, että

$$pm(A) \geqslant \sum_{i=1}^{k} m(A_i),$$

missä $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$.

Ratkaisu: Määritellään $f\colon A \to \mathbb{R}$ kaavalla $f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}$. Tällöin $fA \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ ja f:n normaaliesitys on $f = \sum_{i=1}^{p} i\chi_{B_i}$, jossa $B_i = f^{-1}\{i\}$ ja $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Tässä ei haittaa vaikka f ei saisi jotain arvoa j, koska tällöin $B_j = \varnothing$ ja $jm(B_j) = 0$. Toteamme samalla, että A voidaan myös kirjoittaa erillisenä yhdisteenä $\bigcup_{i=1}^{p} B_i$.

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i) = \sum_{i=1}^{k} I(\chi_{A_i}) =^{\text{L 3.10}} I(\sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}) = I(f)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} im(B_i) \leq \sum_{i=1}^{p} pm(B_i) = p\sum_{i=1}^{p} m(B_i) = pm(A) \quad \square$$