Mitta ja Integraali, 4 viikon tehtävät 1.1-1.3

Tehtävä 1.1. Anna esimerkki yksinkertaisesta funktiosta, joka ei ole Riemann-integroituva (Analyysi II). Muista todistaa, että se on yksinkertainen ja että se ei ole Riemann-integroituva.

Ratkaisu. Tutkitaan esimerkiksi funktiota $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Kyseinen funktio on mitallisen joukon karakteristisena funktiona selvästi yksinkertainen. Toisaalta se ei ole Riemann-integroituva edes millään välillä. Jos nimittäin tarkastellaan välin $[a, b]$ jakoa $K = \{[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_m, b]\}$, niin sitä vastaava Riemannin yläsumma on

$$S_{K,f} = \sum_{I \in K} \ell(I) \max_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in K} \ell(I) \cdot 1 = b - a,$$

sillä jokainen väli sisältää rationaaliluvun. Toisaalta alasummalle pätee

$$s_{K,f} = \sum_{I \in K} \ell(I) \min_{x \in I} f(x) = \sum_{I \in K} \ell(I) \cdot 0 = 0,$$

sillä jokainen väli sisältää irrationaaliluvun. Siis Riemannin ylä- ja alasummat eivät suppene kohti toisiaan millään välillä, joten f ei ole Riemann-integroituva.

Tehtävä 1.2. Anna esimerkki jonosta yksinkertaisia funktioita $(f_j)_{j=1}^{\infty}$, $f_j : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, siten että melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f_j(x) \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ja $I(f_j) = 1$ kaikilla j.

Ratkaisu. Valitaan esimerkiksi $f_j = \chi_{[j,j+1]}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin nimittäin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f_j(x) \to 0$ kun $j \to \infty$, sillä kaikilla $j > x$ pätee $\chi_{[j,j+1]}(x) = 0$. Lisäksi

$$I(f_j) = 1 \cdot m([j, j+1]) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus [j, j+1]) = 1.$$

Tehtävä 1.3. Anna esimerkki jonosta yksinkertaisia funktioita $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, jolle pätee, että $\lim_{j \to \infty} f_j(x)$ on olemassa kaikilla x (mahd. ∞) ja $\lim_{j \to \infty} I(f_j)$ on olemassa, mutta kuitenkin

$$\lim_{j \to \infty} I(f_j) \neq I(\lim_{j \to \infty} f_j(x)).$$

Ratkaisu. Edellisen tehtävän jono $f_j = \chi_{[j,j+1]}$ kelpaa. Sille pätee nimittäin $\lim_{j\to\infty} I(f_j) = \lim_{j\to\infty} 1 = 1$, mutta $I(\lim_{j\to\infty} f_j(x)) = I(0) = 0$.