4.1 Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yksinkertainen, kun:

(a) (1p) $f(x) = |\sin x|$,

(b) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(c) (1p) $E \subset \mathbb{R}$ on ei-mitallinen ja $f(x) = 1$ kun $x \in E$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(d) (1p) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, eli x:n kokonaislukuosa,

(e) (1p) $f(x) = -1$, kun $x > 0$ ja $f(x) = 1$ muuten?

Ratkaisut:

(a) Kuvajoukko $f\mathbb{R} = [0, 1]$ on ylinumeroituva, joten $f \notin Y$.

(b) Kuvajoukko $f\mathbb{R} = \{0, 1\}$ on äärellinen, $f(x) \leq 0 \ \forall x$ ja jokaisen avoimen joukon alkukuva on joko $\varnothing$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c$ tai $\mathbb{R}$ jotka kaikki ovat mitallisia joten $f \in Y$.

(c) Avoimen joukon $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ alkukuva on epämitallinen joukko E, joten $f \notin Y$.

(d) $f(-3) < 0$, joten $f \notin Y$.

(e) $f(x) = -1 < 0$, kun $x > 0$ joten $f \notin Y$.

4.2 Osoita, että jos funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen ja jatkuva, niin se on vakiofunktio. Vihje.[1]

Ratkaisu: Vastaoletus: $\#f\mathbb{R}^n > 1$. $\mathbb{R}^n$ on yhtenäinen metrinen avaruus, jatkuva kuvaus f saa arvot $a_1, a_2 \in f\mathbb{R}^n$ ja $a_1 < a_2$. Väisälä I.14.19. $\Rightarrow f$ saa kaikki arvot väliltä $[a_1, a_2]$, mikä tarkoittaa että f ei ole yksinkertainen eli vastaoletus johti ristiriitaan ja alkuperäinen väite on oikea. $\square$

Huomautus! Bolzanon (seuraus)lauseen oletuksena on jatkuva kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joten perusteluksi ei riitä pelkästään ”Bolzano”. Väisälä I:ssä Bolzanon lause yleistetään yhtenäiseen metriseen avaruuteen. Yksi tapa on valita pisteet $x, y \in \mathbb{R}^n$ s.e. $f(x) \neq f(y)$, sitten valita sellainen yhtenäinen joukko B (esim. kuula) että $x, y \in B$. Väisälä I:n kappaleessa 14 on todistettu lauseita jotka koskevat yhtenäisen joukon kuvaa jatkuvassa kuvauksessa ja miltä näyttää vähintään kaksialkioinen yhtenäinen joukko $\mathbb{R}$:ssä. Näillä lauseilla voi tehtävän ratkaista hieman pidemmän kaavan kautta.

4.3 Olkoon $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että niiden pisteiden $x \in A$ joukko, joilla raja-arvo $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ on olemassa on mitallinen. (Vihje: Lauseet 2.12 ja 2.14.)

[1] Bolzano.

Ratkaisu: Todistamme ensin, että $\{x \in A \mid |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ on mitallinen $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $k, m, n \in \mathbb{N}$. Tällöin
$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{-1}{k} < f_m(x) - f_n(x) < \frac{1}{k}$. Koska kahden mitallisen funktion summa on tässä tapauksessa määritelty kaikkialla niin summafunktio on myös mitallinen ja
$\{x \in A \mid |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\} = (f_m - f_n)^{-1}B(0, \frac{1}{k})$ on mitallinen joukko (2.12). Seuraavaksi pyörittelemme joukkoa, mukavampaan muotoon:
$\{x \in A \mid \exists \lim_{j\to\infty} f(x)\}$
$= \{x \in A \mid \forall k\ \exists l \text{ s.e. } |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\ \forall m, n \geq l\}$
$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{x \in A \mid \exists l \text{ s.e. } |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\ \forall m, n \geq l\}$
$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \{x \in A \mid |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\ \forall m, n \geq l\}$
$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{m,n\geq l} \{x \in A \mid |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$
$(\bigcap_{m,n\geq l} = \bigcap_{x\in L}$, jossa $L = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \geq l \text{ ja } n \geq l\})$

Huomaamme, että $\{x \in A \mid \exists \lim_{j\to\infty} f(x)\}$ voidaan esittää numeroituvina joukko-operaatioina mitallisista joukoista, joten se on mitallinen. $\square$