Mitta ja Integraali, 1 viikon tehtävät 3.4-3.6

Tehtävä 3.4. Osoita, että

a) (1p) suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu,

b) (1p) avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin,

c) (1p) avoin kuula $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko,

d) (2p) suljettu kuula $\overline{B}(x,r)$ on suljettu joukko.

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että kohdasta b) seuraa kohta a). Olkoon $V_1,\dots,V_m$ kokoelma suljettuja joukkoja. On osoitettava, että $\bigcup_{k=1}^m V_k$ on suljettu, eli että sen komplementti on avoin. De-Morganin nojalla

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k=1}^m V_k = \bigcap_{k=1}^m (\mathbb{R}^n \setminus V_k).$$

Oikean puolen joukko on äärellinen leikkaus avoimista joukoista, joten jos b) pätee niin se on avoin. Siis b):stä seuraa a).

Osoitetaan nyt kohta b). Olkoon $U_1,\dots,U_m$ äärellinen kokoelma avoimia joukkoja. Osoitettava, että $\bigcap_{k=1}^m U_k$ on avoin. Valitaan siis jokin $x \in \bigcap_{k=1}^m U_k$. Avoimuuden määritelmän nojalla jokaisella k on olemassa $r_k > 0$ siten, että $B(x,r_k) \subset U_k$. Olkoon $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Tällöin kaikilla k pätee $B(x,r) \subset U_k$, joten $B(x,r) \subset \bigcap_{k=1}^m U_k$. Määritelmän nojalla $\bigcap_{k=1}^m U_k$ on tällöin avoin joukko.

Seuraavaksi kohta c). Valitaan $y \in B(x,r)$ ja merkitään $d = |x-y| < r$. Osoitamme, että $B(y, r-d) \subset B(x,r)$, mistä seuraa $B(x,r)$:n avoimuus. Valitaan siis $z \in B(y, r-d)$. Tällöin

$$|x-z| \le |x-y| + |y-z| < d + r - d = r,$$

joten $z \in B(x,r)$. Väite on todistettu.

Vielä d). On osoitettava, että joukko $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| >$

$r\}$ on avoin. Valitaan siis jokin $y \in U$. Merkitään taas $d = |x - y| > r$ ja osoitetaan, että $B(y, d - r) \subset U$. Valitaan jokin $z \in B(y, d - r)$. Tällöin

$$|x - z| \geq |x - y| - |y - z| > d - (d - r) = r,$$

joten $z \in U$. Väite on jälleen todistettu.

Tehtävä 3.5. Anna esimerkki

a) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ on suljettu muttei avoin,

b) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ei ole suljettu eikä avoin,

c) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ on avoin muttei suljettu,

d) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ on avoin ja suljettu,

e) (1p) suljetuista joukoista C_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ on avoin.

Ratkaisu. Kohtaa a) varten voidaan valita avoimiksi joukoiksi (kaikissa ulottuvuuksissa!) esimerkiksi avoimet kuulat $A_i = B(x, 1/i)$, missä $x \in \mathbb{R}^n$ on jokin kiinnitetty piste. Tällöin nimittäin

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < 1/i \text{ kaikilla } i \in \mathbb{N}\} = \{x\},$$

mikä on suljettu muttei avoin joukko.

Kohtaa b) varten voidaan esimerkiksi tutkia edellisen kohdan kuulia $B(x, 1/i)$ ja lisätä niihin jokin avoin kuula $B = B(y, r)$ jolle pätee, että suljettu kuula $\overline{B}(y, r)$ ei sisällä pistettä x. Tutkimme siis joukkoja $A_i = B(x, 1/i) \cup B$. Niiden leikkaukseksi voidaan laskea

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B(x, 1/i) \right) \cup B = \{x\} \cup B,$$

mikä ei ole suljettu eikä avoin.

Kohdassa c) voidaan taas tutkia pelkästään vakiojonoa $A_i = B$, missä B on jokin avoin kuula. Tällöin nimittäin

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = B,$$

mikä on avoin muttei suljettu joukko.

Kohdassa d) taas valitaan vain joukoiksi koko avaruus $A_i = \mathbb{R}^n$ kaikilla i. Tässä tapauksessa

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^n,$$

mikä on sekä avoin että suljettu joukko. Huomaa, että ainoat joukot, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja $\mathbb{R}^n$:ssä, ovat $\mathbb{R}^n$ itse ja tyhjä joukko.

Kohdan e) suljetuiksi joukoiksi C_i voidaan valita $C_i = \overline{B}(x, i)$, missä x on jälleen jokin kiinnitetty piste. Tällöin

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq i \text{ jollain } i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n,$$

mikä on avoin joukko.

Tehtävä 3.6. (Vrt. teht. 2.6) Jos $a < b$ ja $I =]a, b[$ on avoin väli, olkoon $m(I) = b - a$ välin pituus.

a) (2p) Osoita, että jokaisella ϵ on olemassa joukon $[0, 1] \cup [2, 3]$ peite $\mathcal{F}$, joka koostuu avoimista väleistä, siten että $\sum_{A \in \mathcal{F}} m(A) < 2 + \epsilon$.

b) (3p) Osoita, että jos A on numeroituva, niin jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa avoimien välien kokoelma $\mathcal{F}$, joka on A:n peite ja $\sum_{A \in \mathcal{F}} m(A) < \epsilon$.

Ratkaisu. Kohta a). Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Peitetään joukko $[0, 1] \cup [2, 3]$ avoimien välien kokoelmalla

$$\mathcal{F} = \left\{ \left] -\frac{\epsilon}{5}, 1 + \frac{\epsilon}{5} \right[, \left] 2 - \frac{\epsilon}{5}, 3 + \frac{\epsilon}{5} \right[\right\}.$$

Tähän joukkoperheeseen $\mathcal{F}$ kuuluvat kaksi avointa väliä selvästi peittävät joukon $[0, 1] \cup [2, 3]$, ja lisäksi pätee

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} m(A) = \left(1 + \frac{\epsilon}{5} - \left(-\frac{\epsilon}{5}\right)\right) + \left(3 + \frac{\epsilon}{5} - \left(2 - \frac{\epsilon}{5}\right)\right) = 2 + \frac{4\epsilon}{5} < 2 + \epsilon.$$

Väite on siis todistettu.

Kohta b). Olkoon $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ annettu numeroituva joukko ja $\epsilon > 0$ annettu. Määritellään nyt avoimien välien kokoelma $\mathcal{F} = \{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$ asettamalla

$$I_k = \left] a_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, a_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \right[$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin nimittäin perhe $\mathcal{F}$ peittää joukon A ja

$$\sum_{B \in \mathcal{F}} m(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} - \left(a_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

joten väite on todistettu.