Mitta ja Integraali, 3 viikon tehtävät 4.4-4.6

Tehtävä 4.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j \colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ jono mitallisia funktioita.

a) (2p) Osoita, että joukot $A_j = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia kaikilla $j \in \mathbb{N}$,

b) (3p) Osoita, että joukko $\{x \in A :$ jono $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

Ratkaisu. a) Muistetaan prujun Lause 2.11, jonka mukaan esimerkiksi mitallisten funktioiden summa on mitallinen. Lisäksi lause sanoo, että jos f on mitallinen niin myös $(-1) \cdot f = -f$ on mitallinen. Tästä päättelemme, että funktiot

$$g_j = f_{j+1} - f_j$$

ovat mitallisia kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Siispä kaikilla j myös joukko

$$g_j^{-1}\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$$

on mitallinen avoimen joukon alkukuvana mitallisessa kuvauksessa. Toisaalta

$$g_j^{-1}\{y \in \mathbb{R} : y > 0\} = \{x \in A : g_j(x) > 0\} = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\} = A_j,$$

joten joukko A_j on mitallinen kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

b) Tämä kohta seuraa laskusta

$$\begin{aligned}
&\{x \in A : \text{ jono } (f_j(x))_{j=1}^{\infty} \text{ on aidosti kasvava.}\} \\
&\quad = \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x) \text{ kaikilla } j = 1, 2, \ldots\} \\
&\quad = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \in A : f_{j+1}(x) > f_j(x)\} \\
&\quad = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.
\end{aligned}$$

Sillä nyt tehtävän joukko on mitallinen numeroituvana leikkauksena mitallisista joukoista.

Tehtävä 4.5. Laske $I(f)$, kun $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty seuraavilla tavoilla:

a) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

b) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

c) (1p) $f(x) = 0$, kun $x \notin \mathbb{Z}$ ja $f(x) = \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$,

d) (2p) $f(x) = g(x) + h(x)$ sekä tiedetään, että g ja h ovat yksinkertaisia ja $I(g) = G$ ja $I(h) = H$.

Ratkaisu. a) Tässä f on yksinkertainen funktio, jonka normaaliesitys on $f = 1 \cdot \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus([0,1]\cap\mathbb{Q})}$. Siis

$$I(f) = 1 \cdot m([0,1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus ([0,1] \cap \mathbb{Q})) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \infty = 0.$$

b) Tässä f on yksinkertainen funktio, jonka normaaliesitys on $f = 1 \cdot \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus([0,1]\setminus\mathbb{Q})}$. Siis

$$\begin{aligned} I(f) &= 1 \cdot m([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus ([0,1] \setminus \mathbb{Q})) \\ &= 1 \cdot \big[m([0,1]) - m([0,1] \cap \mathbb{Q})\big] + 0 \cdot \infty = 1 \cdot (1 - 0) + 0 \cdot \infty = 1. \end{aligned}$$

c) Tässä f on yksinkertainen funktio, jonka normaaliesitys on $f = \infty \cdot \chi_{\mathbb{Z}} + 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$. Siis

$$I(f) = \infty \cdot m(\mathbb{Z}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \infty \cdot 0 + 0 \cdot \infty = 0.$$

d) Tämä tehtävä on oleellisesti ottaen prujun lause 3.10 (käy sen todistus läpi!). Siitä seuraa, että jos a ja b ovat yksinkertaisia funktioita niin $I(a+b) = I(a) + I(b)$. Täten

$$I(f) = I(g + h) = I(g) + I(h) = G + H.$$

Tehtävä 4.6. Osoita, että

a) (2p) $(\sin x)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ m.k. x,

b) (2p) jos f ja g ovat yksinkertaisia ja $f(x) = g(x)$ m.k. x, niin $I(f) = I(g)$,

c) (1p) jos $k \in \mathbb{N}$ ja $k > 1$, niin on olemassa alkuluvut p ja q s.e. $p+q = 2k$.

Ratkaisu. Huom. Merkintä m.k. tarkoittaa “melkein kaikilla”, eli lukuunottamatta jotain nollamittaista joukkoa.

a) Muistetaan, että $a^n \to 0$ kun $n \to \infty$ tasan silloin, kun $|a| < 1$. On siis osoitettava, että $|\sin(x)| < 1$ m.k. x. Kuitenkin $|\sin(x)| \leq 1$ kaikilla x, ja arvot ± 1 saavutetaan pisteissä

$$x = \pm\pi/2 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tämä joukko on numeroituva ja siten nollamittainen, joten $|\sin(x)| < 1$ m.k. x.

b) Olkoon $A = f\mathbb{R}^n \cup g\mathbb{R}^n$ funktioiden f ja g arvojoukkojen yhdiste, ja $B \subset \mathbb{R}^n$ se nollamittainen joukko jossa $f(x) \neq g(x)$. Koska f ja g ovat yksinkertaisia, niin A on äärellinen:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

jollain $m \in \mathbb{N}$. Määritellään joukot $E_i = f^{-1}\{a_i\}$ ja $F_i = g^{-1}\{a_i\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Koska $f(x) = g(x)$ m.k. x, niin pätee itseasiassa $E_i \subset F_i \cup A$ ja $F_i \subset E_i \cup A$, mistä päättelemme $m(E_i) = m(F_i)$ kaikilla $i = 1, \ldots, m$. Funktioilla f ja g on esitykset

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i} \quad \text{ja} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{F_i}.$$

Nämä eivät välttämättä ole funktioiden normaaliesitykset, sillä joukoissa $E_1, \ldots, E_m$ ja $F_1, \ldots, F_m$ saattaa olla myös tyhjiä joukkoja mukana. Nämä eivät kuitenkaan vaikuta $I(f)$:ää ja $I(g)$:tä laskettaessa, joten

$$I(f) = \sum_{i=1}^{m} a_i m(E_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i m(F_i) = I(g),$$

kuten haluttiin osoittaa.

c) Tehtävässä on virhe, sillä väite ei päde tapauksessa $k = 1$ (lukua 2 ei voi esittää kahden alkuluvun summana). Siispä ratkaisu sivuutetaan.