4.4 Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$.

(a) (2p) Osoita, että jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy avoin $B \supset E$ siten että $m_n(B) < m_n^*(E) + \varepsilon$

(b) (3p) Osoita, että jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy suljettu $A \subset E$ siten että $m_n(\mathbb{R}^n \setminus A) < m_n^*(\mathbb{R}^n \setminus E) + \varepsilon$

Toimituksen huomio: a-kohdasta puuttuu oletus että $m_n^*(E) < \infty$ ja b-kohdassa $m_n^*(\mathbb{R}^n \setminus E) < \infty$

Ratkaisu a: Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$, $m_n^*(E) < \infty$ ja $\varepsilon > 0$. Nyt valitsemme E:n Lebesguen peitteiden joukosta yhden jäsenen $\mathcal{F}_\varepsilon$, jolla $S(\mathcal{F}_\varepsilon) < m_n^*(E) + \varepsilon$. Merkitsemme $B = \bigcup \mathcal{F}_\varepsilon \supset E$. Subadditiivisuuden nojalla $m_n(B) = m_n(\bigcup \mathcal{F}_\varepsilon) \leq S(\mathcal{F}_\varepsilon)$. B on yhdiste avoimista n-väleistä eli avoin ja $m_n^*(B) < m_n^*(E) + \varepsilon$. $\square$

Ratkaisu b: Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$, $m_n^*(\mathbb{R}^n \setminus E) < \infty$ ja $\varepsilon > 0$. Nyt valitsemme E^c:n Lebesguen peitteiden joukosta yhden jäsenen $\mathcal{F}_\varepsilon$, jolla $S(\mathcal{F}_\varepsilon) < m_n^*(E^c) + \varepsilon$. Merkitsemme $A^c = \bigcup \mathcal{F}_\varepsilon \supset E^c \Leftrightarrow A \subset E$. Subadditiivisuuden nojalla $m_n(A^c) = m_n(\bigcup \mathcal{F}_\varepsilon) \leq S(\mathcal{F}_\varepsilon)$. A^c on avoin, koska se on yhdiste avoimista n-väleistä eli A on suljettu ja $m_n^*(A^c) < m_n^*(E^c) + \varepsilon$. $\square$

4.5 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että tällöin

(a) (1p) $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa avoin $G \supset A$ s.e. $m(G \setminus A) < \varepsilon$,

(b) (1p) $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e. $m(A \setminus F) < \varepsilon$,

(c) (1p) $m(A) = \inf\{m(G) \mid G \supset A, G \text{ avoin}\}$,

(d) (1p) $m(A) = \sup\{m(F) \mid F \subset A, F \text{ kompakti}\}$.

(e) (1p) Osoita, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa mitalliset A ja B, $A \subset E \subset B$ siten että $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

Ratkaisu a: Jaamme A:n erillisiin "renkaisiin" $B_n = A \bigcap (B(0,n) \setminus B(0,n-1))$, jolloin $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ on erillinen yhdiste. $m(B_n) < \infty \ \forall n$, joten tehtävän 4.4. avulla voimme valita B_n:n peitteen $\mathcal{G}_n$ s.e. $S(\mathcal{G}_n) < m(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Merkitsemme $G_n = \bigcup \mathcal{G}_n = \bigcup_{I \in \mathcal{G}_n} I$ ja tällöin $m(G_n) \leq S(\mathcal{G}_n)$. Nyt B_n on mitallinen
$\Rightarrow m(G_n) = m(G_n \bigcap B_n) + m(G_n \setminus B_n)$
$\Leftrightarrow m(G_n \setminus B_n) = m(G_n) - m(G_n \bigcap B_n)$

$= m(G_n) - m(B_n) \leq S(\mathcal{G}_n) - m(B_n) < m(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} - m(B_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$.
Merkitsemme $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, jolloin $A \subset G \Subset \mathbb{R}^n$ ja
$m(G\backslash A) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_n\backslash B_n)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(G_n\backslash B_n) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$. □

Ratkaisu b: Käytämme a-kohdan joukkojen komplementteja ja toteamme että $A \subset G \Leftrightarrow A^c \supset G^c$. Nyt $G^c \Subset \mathbb{R}^n$, A^c mitallinen ja $A^c \setminus G^c = G \setminus A$. Edelleen $m(A^c \setminus G^c) = m(G \setminus A) < \varepsilon$, jolloin mitalliselle joukolle A^c löydetty kaveri F on G^c. □

Ratkaisu c: $m(A) \leq \inf\{m(G) \mid G \supset A, G \Subset \mathbb{R}^n\}$ seuraa mitan monotonisuudesta. Todistetaan "$\geq$": Tehdään vastaoletus: $m(A) < \inf\{m(G) \mid G \supset A, G \Subset \mathbb{R}^n\}$. Valitaan $\varepsilon = \dfrac{\inf\{m(G) \mid G \supset A, G \Subset \mathbb{R}^n\} - m(A)}{2}$. Nyt a-kohdan perusteella on olemassa $A \subset B$ $B \Subset \mathbb{R}^n$ s.e. $m(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin $m(B) = m(B \setminus A) + m(A) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m(B) \notin \{m(G) \mid G \supset A, G \Subset \mathbb{R}^n\}$, mikä on ristiriita eli "$\geq$" pätee ja samalla yhtäsuuruus. □

Ratkaisu d: Monotonisuudesta seuraa, että $m(A) \geq \sup\{m(F) \mid F \subset A, F \text{ kompakti}\}$. Todistamme ristiriidalla ettei "$>$" päde. Oletetaan että $m(A) > \sup\{m(F) \mid F \subset A, F \text{ kompakti}\}$. Merkitään $\sup B = \sup\{m(F) \mid F \subset A, F \text{ kompakti}\}$ ja $\varepsilon = m(A) - \sup B$. On olemassa suljettu $G \subset A$ s.e. $m(A \setminus G) < \frac{\varepsilon}{2}$. G on yhdiste kompakteista joukoista $G_n = G \bigcap \bar{B}(0,n)$ $n \in \mathbb{N}$. Koska kompaktit joukot ovat mitallisia ja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kasvava jono joukkoja, voidaan käyttää *lausetta 1.59.
$\Rightarrow m(A) - \frac{\varepsilon}{2} < m(G) = m(\bigcup G_n) =^{*L1.59.} \lim_{n\to\infty} m(G_n)$
$= \sup\{m(G_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \sup B$
$\Leftrightarrow m(A) - \sup B < \frac{\varepsilon}{2}$ RR.
Eli onnistuimme todistamaan ristiriidan jolloin tehtävänannon väite pitää paikkansa. □

Ratkaisu e: Väite: E mitallinen $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists A$, $B \in$Leb$\mathbb{R}^n$ s.e. $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.
"$\Rightarrow$" nähdään suoraan a- ja b-kohdista.
Todistetaan "$\Leftarrow$". Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$. Valitsemme kaikilla $n \in \mathbb{N}$ mitalliset A_n ja B_n s.e. $A_n \subset E \subset B_n$ ja $m(B_n \setminus A_n)$. Sitten määrittelemme monotoniset jonot $(A_n^*)_n$ ja $(B_n^*)_n$ kaavoilla $A_n^* = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ja $B_n^* = \bigcap_{i=1}^n B_i$. Tällöin
$B_n^* \setminus A_n^* = \bigcap_{i=1}^n B_i \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n B_i \setminus A_i$ on vähenevä jono. Kaikilla

indekseillä n on voimassa $m(B_n^* \setminus A_n^*) \leq m(B_n \setminus A_n) < \frac{1}{n}$. Merkitään $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ja $B^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Koska $A \subset E \subset B$ niin $E = A \bigcup (E \bigcap (B \setminus A))$.
$m(B^* \setminus A^*) = m(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^* \setminus A_n^*) =^{L1.60.} \lim_{n\to\infty} m(B_n^* \setminus A_n^*) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Nyt siis $m(E \bigcap (B \setminus A)) \leq m(B \setminus A) = 0$, mistä seuraa että E on yhdiste mitallisesta A:sta ja nollamittaisesta joukosta eli mitallinen. $\square$

4.6 Osoita, että on olemassa *erilliset* joukot $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$ siten että

$$m_1^*(A \cup B) < m_1^*(A) + m_1^*(B).$$

Ratkaisu: Tiedämme, että Leb$\mathbb{R} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (Lause 1.68. Holopainen). Toisin sanoen $\exists E \subset \mathbb{R}$, joka ei ole Lebesgue-mitallinen. Olk. E epämitallinen. Nyt on siis olemassa $C \subset \mathbb{R}$, jolla $m^*(C) \neq m^*(C \bigcap E) + m^*(C \bigcap E^c)$. Valitaan erilliset $A = C \bigcap E$ ja $B = C \bigcap E^c$. Subadditiivisuus $\Rightarrow m^*(C) = m^*(A \bigcup B)$
$\leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(C \bigcap E) + m^*(C \bigcap E^c)$, mutta A ja B on valittu siten että $m^*(A \bigcup B) \neq m^*(A) + m^*(B)$ josta seuraa $m^*(A \bigcup B) < m^*(A) + m^*(B)$. $\square$