Mitta ja Integraali, 2 viikon tehtävät 4.1-4.3

Tehtävä 4.1. Olkoon $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ jatkuva ja oletetaan, että A on Borel. Osoita, että

a) (4p) $f^{-1}A$ on Borel,

b) (1p) $f^{-1}A$ on mitallinen.

Ratkaisu. a) Määritellään joukkoperhe Γ seuraavasti

$$\Gamma = \{V \subset \mathbb{R}^m : f^{-1}V \text{ on Borel } \mathbb{R}^n\text{:ssä}\}$$

Osoitetaan, että Γ on σ-algebra.

- $\emptyset \in \Gamma$, koska $f^{-1}\emptyset = \emptyset$ ja tyhjä joukko on Borel.
- Jos $V \in \Gamma$, niin $\mathbb{R}^m \setminus V \in \Gamma$ sillä $f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus V) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}V$, mikä on Borel sillä Borel-joukkojen komplementit ovat Borel-joukkoja.
- Jos $A_1, A_2, \ldots \in \Gamma$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ sillä $f^{-1}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}A_i$, mikä on Borel sillä Borel-joukkojen numeroituvat yhdisteet ovat Borel-joukkoja.

Näiden kolmen ehdon nojalla Γ on σ-algebra. Lisäksi Γ sisältää suljetut joukot: Jos $S \subset \mathbb{R}^m$ on suljettu niin $f^{-1}S$ on myös suljettu f:n jatkuvuuden ja Topologia 1:n tietojen nojalla, siis erityisesti $f^{-1}S$ on Borel joten $S \in \Gamma$.

Määritelmän mukaan $\mathbb{R}^m$:n Borel-joukkojen perhe on pienin $\mathbb{R}^m$:n σ-algebra, joka sisältää suljetut joukot. Täten Γ sisältää kaikki $\mathbb{R}^m$:n Borel-joukot. Siis jos $A \subset \mathbb{R}^m$ on Borel niin $A \in \Gamma$ eli $f^{-1}A$ on Borel, kuten haluttiin.

b) Tunnetusti jokainen Borel-joukko on mitallinen. Siis jos A on Borel niin a)-kohdan nojalla $f^{-1}A$ on Borel ja täten myös mitallinen.

Tehtävä 4.2. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. Sanotaan, että f on *jatkuva pisteessä* $x \in \mathbb{R}^n$, jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta(\epsilon, x)$ s.e. $fB(x, \delta(\epsilon, x)) \subset B(f(x), \epsilon)$. Määritellään kaikilla k joukko

$$G_k = \bigcup\{B(x, \delta(\frac{1}{k}, x)) : f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}.$$

a) (1p) Osoita, että G_k on avoin.

b) (2p) Osoita, että jos $y \in G_k$, niin on olemassa sellainen δ, että $fB(y,\delta) \subset B(f(y), \frac{2}{k})$

c) (2p) Osoita, että $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$, eli joukko $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$ on Borel-joukko.

Ratkaisu. a) Joukko G_k on yhdiste avoimista kuulista. Avoimien joukkojen yhdisteet ovat avoimia, joten G_k on avoin.

b) Jos $y \in G_k$, niin on olemassa x siten, että f on jatkuva pisteessä x ja $y \in B(x, \delta(1/k, x))$. Luvun $\delta(1/k, x)$ määritelmän mukaan

$$fB(x, \delta(1/k, x)) \subset B(f(x), 1/k).$$

Täten myös $f(y) \in B(f(x), 1/k)$, joten $B(f(x), 1/k) \subset B(f(y), 2/k)$. Käytetään nyt kuulan $B(x, \delta(1/k, x))$ avoimuutta ja valitaan $\delta > 0$ siten, että $B(y, \delta) \subset B(x, \delta(1/k, x))$. Tällöin

$$fB(y, \delta) \subset fB(x, \delta(1/k, x)) \subset B(f(x), 1/k) \subset B(y, 2/k),$$

joten väite on todistettu.

c) Merkitään $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ ja $B = \{x \in \mathbb{R}^n : f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$. Täytyy osoittaa, että $A = B$. Joukkojen G_k määritelmän nojalla $B \subset G_k$ kaikilla k. Tästä seuraa myös $B \subset A$. Riittää enää osoittaa, että $A \subset B$. Valitaan sis jokin $y \in A$. On osoitettava, että f on jatkuva pisteessä y, joten valitaan $\epsilon > 0$ mielivaltaisesti. Valitaan myös k siten, että $2/k < \epsilon$. Koska $y \in G_k$, on B-kohdan nojalla olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$fB(y, \delta) \subset B(f(y), 2/k) \quad \text{eli myös} \quad fB(y, \delta) \subset B(f(y), \epsilon).$$

Siis f on jatkuva pisteessä y. Nyt joukko $B = A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ on a)-kohdan nojalla numeroituva leikkaus avoimista joukoista. Tällaiset joukot ovat tunnetusti Borel-joukkoja, joten myös B on Borel-joukko. Siis jokaisen funktion jatkuvuuspisteet muodostavat Borel-joukon!

Tehtävä 4.3. Olkoon A_j, $j \in J$ erillisiä mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja. joille $m_n(A_j) > 0$ kaikilla $j \in J$.

a) (2p) Osoita, että kaikilla r, joukko $\{j \in J : m_n(A_j \cap B(\bar{0}, r)) > 0\}$ on numeroituva. (Vihje: viikon 1. teht. 2.5.)

b) (3p) Osoita, että J on numeroituva.

Ratkaisu. a) Idea on matkia ensimmäisen viikon tehtävän 1.5 todistusta ja jakaa annettu joukko $J_r = \{j \in J : m_n(A_j \cap B(0,r)) > 0\}$ osajoukkoihin $J_{r,1}, J_{r,2}, \ldots$ jotka määritellään seuraavasti:

$$J_{r,i} = \{j \in J : m_n(A_j \cap B(0,r)) > 1/i\}.$$

Tällöin nimittäin pätee, että $J_r = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{r,i}$. Lisäksi jokainen joukko $J_{r,i}$ on äärellinen. Jos nimittäin olisi i siten, että joukon $J_{r,i}$ koko olisi ääretön, niin voitaisiin valita numeroituvasti ääretön osajoukko $j_1, j_2, \ldots \subset J_{r,i}$. Tällöin voimme soveltaa mitan täysadditiivisuutta (erillisiin ja mitallisiin) joukkoihin $A_{j_1} \cap B(0,r), A_{j_2} \cap B(0,r), \ldots$ seuraavasti

$$\begin{aligned} m_n(B(0,r)) \leq m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_j \cap B(0,r)\right) &= m_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_{j_i} \cap B(0,r))\right) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} m_n(A_{j_1} \cap B(0,r)) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/m = \infty, \end{aligned}$$

mistä nähdään helposti ristiriita, sillä $m_n(B(0,r))$ on äärellinen. Täten jokainen joukko $J_{r,i}$ on äärellinen, ja joukko J_r on numeroituva numeroituvana yhdisteenä äärellisistä joukoista (Lause 0.16).

b) Huomataan ensin, että jos joukolle A_j pätee $m_n(A_j) > 0$, niin on myös olemassa $r > 0$ siten, että $m_n(A_j \cap B(0,r)) > 0$. Tämä johtuu siitä, että voidaan kirjoittaa $A_j = \bigcup_{r=1}^{\infty}(A_j \cap B(0,r))$. Jos kaikki oikean puolen yhdisteen joukot olisivat nollamittaisia, niin myös A_j olisi nollamittainen subadditiivisuuden nojalla. Tästä näemme, että voidaan kirjoittaa

$$J = \bigcup_{r=1}^{\infty} J_r,$$

missä J_r on edellisen tehtävän joukko, ja täten numeroituva. Siis J on numeroituva numeroituvana yhdisteenä numeroituvista joukoista.