3.1 Ratkaisu:

Määritellään etäisyysfunktio $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, kaavalla $d(x) = d(x, S^1)$ missä d on euklidinen etäisyys. Väisälä I:n perusteella d on jatkuva ja tällöin suljetun joukon alkukuva on suljettu.

Nyt huomataan, että $A = d^{-1}[0, \varepsilon]$ mikä on suljettu $\forall\varepsilon$.

$A = \bar{B}(0, 1+\varepsilon) \backslash B(0, 1-\varepsilon)$, kun $\varepsilon < 1$

$A = \bar{B}(0, 1+\varepsilon)$, kun $\varepsilon \geq 1$

Joukko B on suljettujen joukkojen mielivaltaisena leikkauksena suljettu.

$B = \bar{B}(0, \varepsilon - 1)$, kun $\varepsilon \geq 1$

$B = \varnothing$, kun $\varepsilon < 1$

Kun kuulat korvataan avoimilla on joukko A avointen joukkojen yhdisteenä avoin.

$A = B(0, 1+\varepsilon) \backslash \bar{B}(0, 1-\varepsilon)$, kun $\varepsilon \leq 1$

$A = B(0, 1+\varepsilon)$, kun $\varepsilon > 1$

Väite: $B = \bigcap_{x \in S^1} B(x, \varepsilon) = B(0, \varepsilon - 1)$, kun $\varepsilon > 1$. "$\subset$":

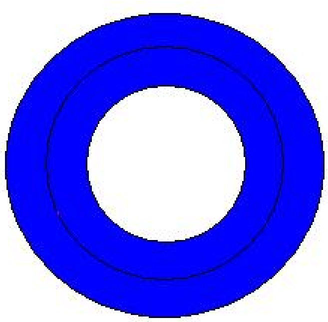
Olk. $y \in \bigcap_{x \in S^1} B(x, \varepsilon)$, jos $y = 0$ niin väite on selvä. Oletetaan että $y \neq 0$.

Nyt $d(y, 0) = d(y, \frac{-y}{|y|}) - 1 < \varepsilon - 1 \Rightarrow y \in B(0, \varepsilon - 1)$ "$\supset$": Olk. $y \in B(0, \varepsilon - 1)$.

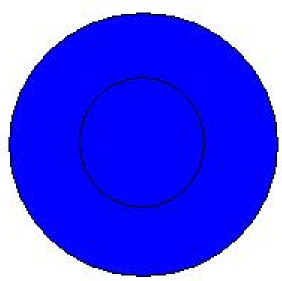
Nyt y:lle pätee että $d(y, S^1) \leq d(y, 0) + d(0, S^1) < \varepsilon - 1 + 1 = \varepsilon \quad \square$

$B = \varnothing$, kun $\varepsilon \leq 1$

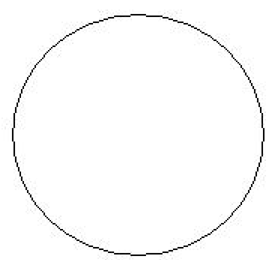
Tässä on kuvia kysytyistä joukoista eri ε:n arvoilla. Kysytyt joukot ovat väritetty sinisellä.



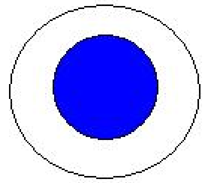
A kun epsilon<1



A kun epsilon>1



B kun epsilon<1



B kun epsilon>1

3.2 Ratkaisu:

(a) $\{B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$
$= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+} \{B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{Q}^n\}$
$= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}_+} \bigcup_{a\in\mathbb{Q}^n} \{B(a,r) \subset \mathbb{R}^n\}$
"Numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva."

(b) Oletetaan että $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin. Avoimuuden nojalla kutakin $x \in A$ kohti on olemassa sellainen $r_x > 0$, että $B(x, r_x) \subset A$. Nyt $\bigcup_{x\in A} B(x, r_x)$ on yhdiste avoimista joukoista eli se on avoin ja se on kysytty joukko A.

(c) Kokoelma $\mathcal{B}_A = \{B(a,r) \subset A \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$ on a-kohdan joukon osajoukkona numeroituva. Väite: $A = \bigcup \mathcal{B}_A$
Todistus: "$\supset$" on $\mathcal{B}_A$:n määritelmän nojalla selvä. Todistamme siis suunnan "$\subset$". Olkoon $x \in A$. Avoimuuden nojalla on siis olemassa x:n kuulaystö $B(x, r_x) \subset A$. Valitaan $r_q \in \mathbb{Q}$ s.e. $r_x > r_q$. Edelleen valitsemme $q \in B(x, \frac{r_q}{3}) \bigcap \mathbb{Q}^n$. Nyt $x \in B(q, \frac{r_q}{3}) \subset B(x, r_x)$ ja $B(q, r_q) \in \mathcal{B}_A$.

3.3 Ratkaisu:
Olkoon $\mathcal{D} = \{U_i \subset \mathbb{R}^n \mid i \in I \text{ ja } U_i\}$ mielivaltainen $\mathbb{R}^n$:n avoin peite. Tehtävän 3.2. nojalla tiedämme että rationaalikuulia on numeroituva määrä ja että jokaiseen epätyhjään avoimeen joukkoon sisältyy rationaalikuula. Kokoelma $\mathcal{B} = \{B_j(a,r) \subset \mathbb{R}^n \mid j \in \mathbb{N}\}$ on nyt numeroitu kokoelma kaikista rationaalikuulista. Nyt jokaista $j \in \mathbb{N}$ kohti valitsemme $U_i \in \mathcal{D}$ s.e. $B_j \subset U_i$. Jos tälläistä U_i ei löydy niin jätämme sen määrittelemättä. Numeroimme valitut avoimet joukot ja muodostamme numeroituvan osapeitteen $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Täytyy enää osoittaa että $\mathbb{R}^n \subset \bigcup \mathcal{D}_0 = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$.
Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Koska $\mathcal{D}$ on $\mathbb{R}^n$:n peite niin $x \in U$ jollakin $U \in \mathcal{D}$. Koska

jokaiselle avoimen joukon alkiolle löytyy joukkoon sisältyvä rationaalikuulaympäristö, niin $x \in B_j \subset U$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Siis U_j on määritelty, koska $x \in B_j \subset U_j \in \mathcal{D}_0$.