Mitta ja integraali – Viikko 2
Esimerkkiratkaisuja

Ke 30.05.2012

3.1 Vastaava tulos on luennoilla todistettu äärelliselle yhdisteelle erillisistä mitallisista joukoista, joten jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Mitan monotonisuuden perusteella siis

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right),$$

joten

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(E_i) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

Suunta $\geq$ seuraa suoraan ulkomitan subadditiivisuudesta.

3.2 (a) Koska $m^*(E) = 0$, $m^*(A \cap E) = 0$. Nollamittaiset joukot ovat mitallisia, ja mitallisten joukkojen leikkaukset, yhdisteet ja erotukset ovat mitallisia, joten $(A \cup E) \setminus E$ on mitallinen. Siis myös $((A \cup E) \setminus E) \cup (A \cap E)$ on mitallinen. Mutta tämä on joukko A.

(b) Jokaisella joukolla $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $\operatorname{int} A \subset A \subset \operatorname{int} A \cup \partial A$. Lisäksi $\operatorname{int} A$ on aina avoin. Koska

$$V = \operatorname{int} V \cup (V \cap \partial V),$$

V on yhdiste avoimesta ja nollamittaisesta joukosta. Koska avoimet joukot ja nollamittaiset joukot ovat mitallisia, V on mitallinen.

(c) Esimerkiksi rationaaliluvut $\mathbb{Q}$. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, mutta $\mathbb{Q}$ on numeroituvana joukkona nollamittainen, ja siis mitallinen.

3.3 (a) Olkoon A kaikkien sellaisten rationaalilukujen joukko, joilla on desimaaliesitys, jossa on korkeintaan 16 desimaalia. Tämä on rationaalilukujen osajoukkona numeroituva. Koska väli

$$I = [0{,}0000000000000004; 0{,}00000000000000004999\ldots]$$

(ja jokainen sen translaatti) on suljettu, haluttu joukko

$$\bigcup_{r \in A} (r + I)$$

on Borel.

(b) Olkoon

$$A_k^n = \{r \in \mathbb{R} \colon \text{luvun } r \text{ jossakin desimaalikehitelmässä } n\text{:s desimaali on } k\}.$$

Kuten 1-kohdassa, A_k^n on Borel kaikilla n, k. Siis joukko

$$B_n = \bigcup_{k \neq 4} A_k^n$$

on Borel. Joukkoon B_n kuuluu reaaliluvut, joiden jossakin desimaalikehitelmässä n:s desimaali ei ole 4.

Merkitään symbolilla P luonnollisten lukujen koäärellisten osajoukkojen joukkoa. Tämä on numeroituva, sillä äärellisten luonnollisten lukujen osajoukkojen joukko on numeroituva. Olkoon

$$C = \bigcup_{N \in P} \bigcap_{i \in N} B_i.$$

Joukko C on Borel, ja koostuu niistä reaaliluvuista, joiden desimaalikehitelmän ne indeksit, joissa on nelonen, sisältyvät johonkin äärelliseen joukkoon. C on siis haluttu joukko.

3.4 (a) Koska $[0,1[\ = \{0\} \cup\ ]0,1[$, joukko $[0,1[$ on yhdiste numeroituvasta ja avoimesta joukosta, ja siten Borel.

(b) Joukko on numeroituva, joten se on numeroituva yhdiste yksiöistä ja siten Borel.

(c) Olkoot A_k^n kuten edellisessä tehtävässä. Olkoon Kaarlon puhelinnumero $a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$.

Olkoon

$$B_n = \bigcap_{i=0}^{9} A_{a_i}^{n+i},$$

jolloin B_n on Borel jokaisella n.

Joukko B_n siis koostuu niistä reaaliluvuista, joiden desimaalikehitelmässä esiintyy Kaarlon puhelinnumero alkaen n:stä desimaalista. Täten haluttu joukko on

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$

joka on selvästi Borel.

3.5 (a) Koska Γ on σ-algebra, se sisältää joukkojensa numeroituvat leikkaukset, joten $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \Gamma$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. σ-algebra sisältää toisaalta myös joukkojensa numeroituvat yhdisteet, joten $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \Gamma$. $\limsup$ samoin.

(b) Koska $\bigcap_{k\geq n} A_k \subset A_i$ jokaisella n, $i \geq n$,

$$\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \mu(A_i) \quad \text{kun } i \geq n,$$

joten

$$\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \inf_{i\geq n} \mu(A_i),$$

ja ottamalla raja-arvot puolittain,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geq n} \mu(A_i),$$

Kasvavalle jonolle $\bigcap_{k\geq n} A_k$ pätee

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right),$$

joten

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(c) Merkitään $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Koska $\limsup A_j \subset A$, ja mainitut joukot ovat kaikki mitallisia (ja äärellismitallisia),

$$\mu\left(\limsup A_j\right) = \mu\left(A\right) - \mu\left(A \setminus \limsup A_j\right).$$

Toisaalta de Morganin lakien nojalla

$$A \setminus \limsup A_j = \liminf (A \setminus A_j) ,$$

joten

$$\mu (\limsup A_j) = \mu (A) - \mu (\liminf (A \setminus A_j)) .$$

Edellisen kohdan nojalla

$$\begin{aligned} \mu (\limsup A_j) &\geq \mu (A) - \liminf \mu (A \setminus A_j) \\ &= \limsup \mu (A) - \mu (A \setminus A_j) \\ &= \limsup \mu (A_j) . \end{aligned}$$

(d) Oletetaan, että $\mu(\limsup A_j) > 0$, eli

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k \right) = a > 0.$$

Erityisesti

$$\mu \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \geq a$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Subadditiivisuuden nojalla $\sum_{k=n}^{\infty} \mu (A_k) \geq a$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Tällöin ei summa $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ tietenkään voi supeta.

3.6 Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Näytetään aluksi, että $\mathcal{H}^1(A) \leq m_1^*(A)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$. Tällöin löytyy joukon A Lebesguen peite $\mathcal{F}$, jolla $S(\mathcal{F}) < m_1^*(A) + \varepsilon/2$. Hajoitetaan jokainen peitteen $\mathcal{F}$ väli äärellisen moneen osaan, joista jokaisen pituus on enintään δ. Esimerkiksi

$$]0,1[\qquad \longrightarrow \qquad]0,\delta[\,,]\delta, 2\delta[\,, \ldots,]n\delta, 1[\,.$$

Muodostetaan näistä peitteen $\mathcal{F}$ alkioiden osista joukko $\mathcal{F}'$. Tämä ei vielä ole joukon A peite, sillä välejä hajotettaessa jakopisteet saattoivat jäädä pois, mutta näitä on vain numeroituva määrä joten lisäämällä joukkoon $\mathcal{F}'$ numeroituva määrä välejä, joiden pituudet ovat $\max(\delta, \varepsilon/4)$, $\max(\delta, \varepsilon/8)$, $\max(\delta, \varepsilon/16)$, $\ldots$, saadaan peite $\mathcal{F}''$ joukolle A. Tämän peitteen alkioiden läpimitat ovat $\leq \delta$, sillä avoimen välin $]a,b[$ läpimitta on $b-a$, ja

$$\sum_{E \in \mathcal{F}''} d(E)^1 < m_1^*(A) + \varepsilon.$$

Siis $\mathcal{H}^1_\delta(A) < m_1^*(A) + \varepsilon$. Tämä päti kaikilla $\varepsilon > 0$, joten $\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq m_1^*(A)$. Tämä päti kaikilla $\delta > 0$, joten $\mathcal{H}^1(A) \leq m_1^*(A)$.

Toinen suunta: Olkoon $\varepsilon > 0$. Hausdorffin ulkomitan määritelmän nojalla löytyy $\delta > 0$ ja joukon A peite $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$, joka koostuu joukoista, joiden läpimitat ovat alle δ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(F_1)^1 < \mathcal{H}^1(A) + \varepsilon.$$

Koostukoon $\mathcal{F}'$ peitteen $\mathcal{F}$ joukkojen konveksien verhojen sulkeumista. Nämä ovat suljettuja välejä, joiden pituudet ovat alkuperäisten joukkojen halkaisijat. Siis $\mathcal{F}'$ on joukon A *suljettu*[1] Lebesguen peite, ja

$$S(\mathcal{F}') = \sum_{i=1}^{\infty} d(F_1)^1 < \mathcal{H}^1(A) + \varepsilon.$$

Siis $m_1^*(A) \leq \mathcal{H}^1(A) + \varepsilon$. Koska tämä päti millä tahansa $\varepsilon > 0$, $m_1^*(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$.

[1] Lebesguen ulkomitta voidaan laskea myös suljetuilla väleillä.