Mitta ja integraali – Viikko 2

Jokainen tehtävä on 5 pisteen arvoinen. Jos tehtävässä on monta kohtaa ((a),(b)...), niin jokaisen kohdalla lukee montako pistettä kyseisestä kohdasta saa.

Ma 28.05.2012

1.1 (a) (3p) Osoita, että jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $m^*(A) \leqslant m^*(B)$

(b) (2p) Anna esimerkki joukoista $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \neq B$ ja $m^*(A) = m^*(B)$. (Todistuksineen.)

Ratkaisu. (a) Jos $\mathcal{F}$ on B:n Lebesguen peite, niin $\mathcal{F}$ on myös A:n Lebesguen peite, joten

$$\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } B\text{:n Leb.peite}\} \subset \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Leb.peite}\},$$

mistä seuraa, että

$$\inf\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } B\text{:n Leb.peite}\} \geqslant \inf\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Leb.peite}\},$$

eli väite, koska vasemmalla puolella on B:n ulkomitta ja vasemmalla A:n ulkomitta.

(b) $A = \varnothing$ ja $B = \mathbb{Q}$. Molemmat ovat $\mathbb{R}$:n osajoukkoja. Aiemmin on todistettu, että $m^*(\varnothing) = m^*(\mathbb{Q}) = 0$ ja selvästi $\varnothing \subset \mathbb{Q}$.

1.2 Olkoon $\mathcal{F}$ joukon $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ äärellinen Lebesguen peite (siinä on äärellinen lukumäärä avoimia välejä). Osoita, että silloin $\sum_{A \in \mathcal{F}} m_1^*(A) \geqslant 1$. Missä kohtaa päättelyssä tulee käyttöön oletus, että välejä on äärellinen määrä? Minkä tärkeän ulkomitan määritelmää koskevan havainnon tästä esimerkistä voi tehdä?

Ratkaisu. Olkoon $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, missä $A_i = \,]a_i, b_i[$. Koska $\mathcal{F}$ on äärellinen, pätee (Topo I) että

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]\,.$$

Koska $\mathcal{F}$ on joukon $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ Lebesguen peite, niin $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ ja koska $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}$ on tämän sulkeuma, ja $[0, 1]$ on joukon $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sulkeuma, pätee $[0, 1] \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{k} A_i}$, eli $[0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$. Suljettujen välien joukko

$$\{[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]\}$$

on siis välin $[0,1]$ peite. Silloin jokaisella $\varepsilon > 0$ myös

$$\mathcal{F}' = \{]a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[\,, \ldots,]a_k - \varepsilon, b_k + \varepsilon[\}$$

on välin $[0,1]$ Lebesguen peite, joten $S(\mathcal{F}') \geqslant 1$. Toisaalta $S(\mathcal{F}') = S(\mathcal{F}) + 2k\varepsilon$, eli $S(\mathcal{F}) \geqslant 1 - 2k\varepsilon$. Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, saadaan $S(\mathcal{F}) \geqslant 1$, mikä oli todistettavana.

Tästä opimme, että Lebesguen ulkomitan määritelmässä on olennaista, että sallimme myös äärettömien peitteiden käytön, koska kuten näemme yllä kun $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$:

$$\inf\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on äärellinen } A\text{:n Lebesguen peite}\} = 1$$

on 1, vaikka

$$m^*(A) = \inf\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} = 0.$$

1.3 Osoita, että joukon $G \subset \mathbb{R}^3$ ulkomitta on nolla, kun

(a) (1p) $G = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B^2(0,r)\}$ jollain vakiolla r. Eli G on "litteä kiekko", jonka säde on r.

(b) (2p) $G = \{(x,y,C) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, jollain vakiolla $C \in \mathbb{R}$,

(c) (2p) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Q}\}$.

Ratkaisu: (a) Tehdään vähän yleisempi tapaus seuraavaa kohtaa varten: olkoon $G = \{(x,y,C) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B^2(0,r)\}$. Olkoon $\mathcal{F} = \{]-r,r[\times]-r,r[\times]C-\varepsilon, C+\varepsilon[\}$. nyt $\mathcal{F}$ on joukon G Lebesguen peite ja $S(\mathcal{F}) = (2r)^2 \cdot 2\varepsilon$. Koska tämä pätee kaikilla ε, on ulkomitta nolla, sillä $(2r)^2 \cdot 2\varepsilon$ lähestyy nollaa kun ε lähestyy nollaa.

(b) Olkoon $G_r = \{(x,y,C) \in \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B^2(0,r)\}$ kuten kohdassa (a). Nyt $G = \bigcup_{r=1}^{\infty} G_r$ on numeroituva yhdiste nollamittaisista joukoista eli nollamittainen (esim. subadditiivisuuden takia.)

(c) Olkoon $G_C = \{(x,y,C) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$, kuten kohdassa (b). Nyt $G = \bigcup_{C \in \mathbb{Q}} G_C$, joka on taas numeroituva yhdiste nollamittaisista joukoista, eli nollamittainen.

1.4 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $B_k \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ja $m_n^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = m_n^*(A)$.

Ratkaisu: Jos $m^*(A) = \infty$, nin valitaan $B_k = \mathbb{R}^n$ kaikilla k, jolloin ehto toteutuu. Oletetaan, että $m^*(A) < \infty$. Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ olkoon $\mathcal{F}_k$ A:n Lebesguen peite, jolle $S(\mathcal{F}) < m^*(A) + 1/k$. Koska $\mathcal{F}$ on myös joukon $\bigcup \mathcal{F}_k$ Lebesguen peite, seuraa että $m^*(\bigcup \mathcal{F}_k) < m^*(A) + 1/k$. Toisaalta $A \subset \bigcup \mathcal{F}_k$, joten $m^*(A) \leqslant m^*(\bigcup \mathcal{F}_k)$. Voidaan siis asettaa $B_k = \bigcup \mathcal{F}_k$. Silloin $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset B_k$ kaikilla k, joten jono toteuttaa vaaditun ehdon.

1.5 Osoita suoraan ulkomitan määritelmästä, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n^*(A) = m_n^*(A \cup \{x\})$.

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $\mathcal{F}$ A:n Lebesguen peite s.e. $S(\mathcal{F}) < m^*(A) + \varepsilon$ ja $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\}$. Silloin $\mathcal{F}'$ on joukon $A \cup \{x\}$:n Lebesguen peite ja $S(\mathcal{F}') \leqslant S(\mathcal{F}) + \varepsilon$. Tästä seuraa, että infimum yli joukon $A \cup \{x\}$ Lebesguen summien on korkeintaan infimum yli A:n Lebesguen summien, eli $m^*(A \cup \{x\}) \leqslant m^*(A)$. Toinen suunta seuraa tehtävästä 1.1(a) yllä.

1.6 Osoita suoraan mitallisuuden määritelmästä, että seuraavat joukot ovat $\mathbb{R}$:n mitallisia osajoukkoja:

(a) (1p) $\mathbb{R}$,

(b) (1p) $\varnothing$,

(c) (1p) $\{1\}$,

(d) (2p) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Ratkaisu. (a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Silloin

$$m^*(A) = m^*(A) + 0 = m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(\varnothing) = m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*(A \setminus \mathbb{R}),$$

eli Carathéodoryn ehto toteutuu.

(b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}$. Silloin

$$m^*(A) = 0 + m^*(A) = m^*(A \cap \varnothing) + m^*(A \setminus \varnothing)$$

eli Carathéodoryn ehto toteutuu.

(c) Olkoon A testijoukko. Nyt edellisen tehtävän nojalla

$$m^*(A \setminus \{1\}) = m^*((A \setminus \{1\}) \cup \{1\}) = m^*(A)$$

ja

$$m^*(A \cap \{1\}) \leqslant m^*(\{1\}) = m^*(\varnothing \cup \{1\}) = m^*(\varnothing) = 0$$

joten voidaan laskea

$$m^*(A) = m^*(A) + 0 = m^*(A \setminus \{1\}) + m^*(A \cap \{1\}),$$

eli Carathéodoryn ehto toteutuu.

(d) Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ja olkoon $\mathcal{F}$ mikä tahansa A:n Lebesguen peite. Olkoon

$$\mathcal{F}_+ = \{A \cap \mathbb{R}_+ \mid A \in \mathcal{F}\}$$

ja

$$\mathcal{F}_- = \{A \cap \mathbb{R}_- \mid A \in \mathcal{F}\} \cup \{]-\varepsilon, \varepsilon[\}$$

Nyt $\mathcal{F}_+$ on joukon $A \cap \mathbb{R}_+$ Lebesguen peite (sen alkiot ovat avoimia välejä, koska avointen välien ja joukon $\mathbb{R}_+$ leikkaukset ovat avoimia välejä ja se peittää joukon $A \cap \mathbb{R}_+$, koska $\mathcal{F}$ peittää A:n) ja $\mathcal{F}_-$ on joukon $A \setminus \mathbb{R}_-$ Lebesguen peite. Lisäksi on helppo tarkistaa, että

$$S(\mathcal{F}_-) + S(\mathcal{F}_+) = S(\mathcal{F}) + 2\varepsilon.$$

Koska tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$ tarkoittaa se sitä, että

$$\inf\{S(\mathcal{F}_-)+S(\mathcal{F}_+) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} \leqslant \inf\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\} = m^*(A).$$

Laajentamalla epäyhtälön vasemmalla puolella olevaa joukkoa, voidaan pienentää edelleen sen infimumia:

$$\inf\{S(\mathcal{F}_-) + S(\mathcal{F}_+) \mid \mathcal{F}_- \text{ on } A \setminus \mathbb{R}_+\text{:n ja } \mathcal{F}_+ \text{ on } A \cap \mathbb{R}_+\text{:n Lebesguen peite}\}$$

$$\leqslant \inf\{S(\mathcal{F}_-) + S(\mathcal{F}_+) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\text{:n Lebesguen peite}\}.$$

Kuitenkin olemme nähneet, että $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$, ja

$$\{S(\mathcal{F}_-) + S(\mathcal{F}_+) \mid \mathcal{F}_- \text{ on } A \setminus \mathbb{R}_+\text{:n ja } \mathcal{F}_+ \text{ on } A \cap \mathbb{R}_+\text{:n Lebesguen peite}\}$$

$$= \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\setminus\mathbb{R}_+\text{:n Lebesguen peite}\}+\{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ on } A\cap\mathbb{R}_+\text{:n Lebesguen peite}\},$$

mutta viimeisten infimimumit ovat $A \setminus \mathbb{R}_+$:n ja $A \cap \mathbb{R}_+$:n ulkomitat, eli saimme

$$m^*(A) \geqslant m^*(A \setminus \mathbb{R}_+) + m^*(A \cap \mathbb{R}_+).$$

Subadditiivisuudesta seuraa

$$m^*(A) \leqslant m^*(A \setminus \mathbb{R}_+) + m^*(A \cap \mathbb{R}_+),$$

eli väite on todistettu.