Mitta ja integraali – Viikko 4

Ke 13.06.2012

3.1 Laske raja-arvo

(a) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx$

(b) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_1^{2012} \sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}} dx$

Ratkaisu. (a) Välillä $[0, 1]$ funktio $g(x) = 1/\sqrt{x}$ on majorantti funktiojonolle f_i,

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{x + e^{i(x-1)}}}.$$

Funktion g integraali $\int_0^1 g$ tunnetusti suppenee, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx = \int_0^1 0\, dx = 0.$$

(b) Välillä $[1, 2012]$ funktio $g(x) = x$ on majorantti funktiojonolle f_i, missä

$$f_i(x) = \sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}},$$

sillä

$$\sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}} \leq \sqrt{x^2} = x.$$

Funktion g integraali $\int_0^1 g$ tunnetusti suppenee, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^{2012} \sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}} dx = \int_1^{2012} \lim_{k\to\infty} \sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}} dx = \int_1^{2012} x = 2024072.$$

3.2 Laske raja-arvo

(a) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + \sin^k x}} dx$

(b) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_0^1 e^{-x^k} dx$

Ratkaisu. (a) Olkoon $x \in [0,\pi]$. Tällöin $\sin x \geq 0$, joten

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+\sin^k x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

funktio $1/\sqrt[3]{x^2}$ integraali tutkittavalla välillä tunnetusti suppenee, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+\sin^k x}} &= \int_0^\pi \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+\sin^k x}} = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_0^\pi x^{-2/3} = 3\pi^{1/3} - 3\cdot 0^{1/3} \\
&= 3\pi^{1/3}.
\end{aligned}$$

(b) Funktio e^{-x^k} on tutkittavalla välillä rajoitettu, eli vakiofunktio toimii sille majoranttina. Siispä dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_0^1 e^{-x^k} &= \int_0^1 \lim_{k\to\infty} e^{-x^k} \\
&= \int_0^1 \lim_{k\to\infty} e^{-x^k} = \int_0^1 e^0 = 1.
\end{aligned}$$

3.3 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geqslant 0$. Jokaiselle mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$ määritellään $\mu(A) = \int_A f$. Osoita, että $(\mathbb{R}^n, \mathit{Leb}(\mathbb{R}^n), \mu)$ on mitta-avaruus. (Määritelmä 1.48)

Ratkaisu. Huoh. $\mathit{Leb}(\mathbb{R}^n)$ on tunnetusti σ-algebra. Lisäksi $\mu\colon \mathit{Leb}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$. Selvästi $\mu(\emptyset) = 0$. Olkoot nyt $A_i \in \mathit{Leb}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, erillisiä. Määritellään funktiojono g_i niin, että

$$g_i = \sum_{j\leq i} f\chi_{A_j} \left(= f\chi_{\bigcup_{j\leq i} A_j}\right).$$

Tällöin $g_i \to f\chi_A$ (erillisyyden nojalla), missä $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Lisäksi

$$\int g_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(A_j).$$

Funktiojono g_i on nouseva, joten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \int_A f = \int f\chi_A = \int \lim g_i = \lim \int g_i \\
&= \lim \int g_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \mu(A_j) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).
\end{aligned}$$

Siispä μ on täysadditiivinen, joten se on mitta.

3.4 Olkoot $f_j \colon E \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita siten että $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ ja $\int_E f_1 < \infty$. Osoita, että

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \geqslant \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Tämä on ns. laskeva MKL. Vihje: $g_j(x) = f_1(x) - f_j(x)$ ja MKL.

Ratkaisu. Funktio f_1 on majorantti jonolle, joten väite seuraa suoraan dominoidun konvergenssin lauseesta.

3.5 Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx.$$

Vihje[1].

Ratkaisu. Lasketaan erikseen raja-arvot

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}}.$$

Koska $\int_0^1 1/\sqrt{x}$ suppenee ja kaikilla $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

dominoidun konvergenssin nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2.$$

Sitten toinen integraali. Välillä $[1, \infty]$

$$\frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} \leq \frac{1}{\sqrt{e^{k(x-1)}}} = \frac{1}{(\sqrt{e})^{k(x-1)}}.$$

Koska näin saadun majorantin integraali selvästi suppenee tutkittavalla välillä, dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} = \int_1^\infty \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} = \int_1^\infty 0 = 0.$$

Näin kysytyksi raja-arvoksi saadaan $0 + 2 = 2$.

[1] $\lim \int_0^\infty f = \lim \int_0^1 f + \lim \int_1^\infty f$, MKL ja tehtävät 3.1(a) ja 3.4.

3.6 Vanha koetehtävä (10.08.2004): Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x+n\sqrt{x}}{1+nx}dx = 2.$$

Ratkaisu.

$$\frac{x+n\sqrt{x}}{1+nx} = \frac{x}{1+nx} + \frac{n\sqrt{x}}{1+nx} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Olemme siis löytäneet integroituvan majorantin, joten dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x+n\sqrt{x}}{1+nx} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\frac{x+n\sqrt{x}}{1+nx} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x} = 2.$$