Mitta ja integraali – Viikko 3
Esimerkkiratkaisuja

Ke 06.06.2012

3.1 Osoita seuraavista kuvauksista, että ne ovat mitallisia:

(a) (1p) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_2$,

Ratkaisu. Kuvaus on selvästi jatkuva ja siis mitallinen.

(b) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^{-1}$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = \infty$

Ratkaisu. Riittää osoittaa, että $f^{-1}[-\infty, a]$ on mitallinen jokaisella $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tutkitaan erikseen tapaukset $a \leq 0$ ja $a > 0$.

Mikäli $a \leq 0$, $f^{-1}[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \colon x^{-1} \leq a\} = [a, 0[$. Tämä on selvästi mitallinen.

Jos taas $a > 0$, $f^{-1}[-\infty, a] = \,]-\infty, 0[\cup]0, a^{-1}]$. Tämäkin joukko on selvästi mitallinen.

Siis kuvaus f on mitallinen.

(c) (1p) $A \subset \mathbb{R}$ on mitallinen joukko ja $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$ on määritelty kaavalla

$$f(x) = m(A \cap \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}).$$

Ratkaisu. Kuvaus on kasvava, joten väite seuraa seuraavasta kohdasta.

(d) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$ on kasvava.

Ratkaisu. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin $f^{-1}[-\infty, a]$ on alaspäin suljettu: jos $x < y$ ja $y \in f^{-1}[-\infty, a]$, niin $x \in f^{-1}[-\infty, a]$.

Reaalilukujen ainoat alaspäin suljetut osajoukot ovat $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sekä kaikilla $x \in \mathbb{R}$ välit $]-\infty, x]$ ja $]-\infty, x[$. Kaikki näistä ovat mitallisia.

Siis kuvaus f on mitallinen.

(e) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$, $f(x) = \infty$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$, kun $x \notin \mathbb{Q}$.

Ratkaisu. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tutkitaan alkukuvaa $f^{-1}[-\infty, a]$. Mikäli $a < 0$, tämä alkukuva on tyhjä. Jos taas $a \geq 0$, alkukuva on irrationaalilukujen joukko. Kumpikin joukko on mitallinen, joten f on mitallinen.

3.2 Anna esimerkki sellaisesta m_2-mitallisesta funktiosta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, että $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla $g(x) = f(x, 0)$, ei ole m_1-mitallinen. Vihje alaviitteessä.[1]

[1] Vaikka $E \subset \mathbb{R}$ olisi ei-(m_1)-mitallinen, $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ on kuitenkin (m_2)-nollamittainen, eli mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $A = E \times \{0\}$, missä E on jokin epämitallinen joukko. Koska $A \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, A on nollamittainen ja siten mitallinen. Tällöin karakteristinen funktio χ_A on myös mitallinen, mutta kaavalla $g(x) = \chi_A(x, 0)$ määritelty funktio on epämitallisen joukon $E \subset \mathbb{R}$ karakteristinen funktio, joten se ei voi olla mitallinen.

3.3 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että joukko $\{x \in A \mid f(x) > q\}$ on mitallinen jokaisella $q \in \mathbb{Q}$. Osoita, että

(a) (2p) A on mitallinen

(b) (3p) f on mitallinen

Ratkaisu. $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$, missä $A_q = \{x \in \mathcal{A}\colon f(x) > q\}$, joten A on numeroituva yhdiste mitallisista joukoista, ja siten mitallinen.

Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Mikäli $x \in \mathbb{Q}$, oletuksen nojalla $f^{-1}\,]x, \infty] = A_x$ on mitallinen. Jos taas $x \notin \mathbb{Q}$,

$$f^{-1}\,]x, \infty] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q > x} A_q,$$

joka on mitallisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä mitallinen. Siis funktio f on mitallinen.

3.4 Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon B \to \mathbb{R}$ mitallinen. Olkoon

$$A_r = \{x \in B \mid f(x) > r\},$$

kun $r \in \mathbb{R}$. Osoita:

(a) (1p) $A_0 = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$

(b) (2p) A_r ovat kaikki mitallisia, $r > 0$.

(c) (2p) jos $m_n(A_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $m_n(A_r) > 0$.

Ratkaisu. a) Suunta $\supset$ on selvä. Olkoon $x \in A_0$. Tällöin $0 < x/2 < x$, joten $x \in A_{x/2}$, ja siten $x \in \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$.

b) Selvä mitallisen funktion määritelmän perusteella.

c) Tehdään vastaoletus: Jokaisella $r \in \mathbb{R}_+$, $m(A_r) = 0$. Koska $A_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$, A_0 on numeroituva yhdiste nollamittaisista joukoista ja siten nollamittainen.

3.5 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa joukot $B_1, B_2, \ldots$ siten, että $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja rajoittumakuvaus $f \restriction B_i$ on mitallinen jokaisella i. Osoita, että f on mitallinen.

Ratkaisu. Olkoon $G \subset \mathbb{R}$ avoin. Tällöin

$$\begin{aligned} f^{-1}G &= \{x \in A \colon f(x) \in G\} \\ &= \left\{ x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \colon f(x) \in G \right\} \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x \in B_i \colon f(x) \in G\} \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{x \in B_i \colon (f \restriction B_i)(x) \in G\} \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (f \restriction B_i)^{-1} G, \end{aligned}$$

joka on numeroituva yhdiste mitallisista joukoista ja siten mitallinen.

3.6 Laske $\limsup_{k\to\infty} a_k$ ja $\liminf_{k\to\infty} a_k$ kun

(a) (1p) $a_k = (-1)^k$,

(b) (1p) $a_{k+1} = a_k^2$ ja $a_1 = 2$,

(c) (1p) $a_{k+1} = (-2) \cdot a_k$ ja $a_1 = -2$,

(d) (2p) $a_k = \sin(q_k)$, missä $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ on kaikkien rationaalilukujen numerointi.

Ratkaisu. a) Millä tahansa n, $\{a_k \colon k \geq n\} = \{-1, 1\}$, joten $\limsup_{n\to\infty} = 1$ ja $\liminf_{n\to\infty} = -1$.

b) Jonolla a_n on raja-arvo ∞, joten $\limsup a_n = \liminf a_n = \infty$.

c) $\limsup a_n = \infty$, sillä jono on ylhäältä rajoittamaton, erityisesti sen häntäpäät ovat ylhäältä rajoittamattomia. Vastaavasti jono on alhaalta rajoittamaton, joten $\liminf a_n = -\infty$.

d) Koska $\sin \colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ on jatkuva, tiheän joukon $\{q_k \colon k \geq n\}$ kuva $\{a_k \colon k \geq n\}$ on tiheä joukossa $[-1, 1]$. Siis $\liminf a_n = -1$ ja $\limsup a_n = 1$.