Mitta ja integraali – Viikko 5

Ma 18.06.2012

Valitse kolme tai useampi tehtävää, jotka ovat olleet aiemmin kurssilla, joita et ole vielä tehnyt ja tee ne.

Ti 19.06.2012

Valitse kolme tai useampi tehtävää, jotka ovat olleet aiemmin kurssilla, joita et ole vielä tehnyt ja tee ne.

Vaihtoehto

Jos yllä oleva tuntuu tylsältä voit tehdä yhden tai useamman alla olevista laajemmista tehtävistä.

- (Cantorin joukko) Olkoon $A_1 = [0,1]$ ja induktiolla $A_{n+1} = \frac{1}{3}A_n \cup (\frac{1}{3}A_n + \frac{2}{3})$. Joukkoa $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kutsutaan Cantorin joukoksi. Osoita, että

  (8p) C on ylinumeroituva,

  (5p) C on mitallinen,

  (7p) $m_1(C) = 0$.

- (Läskit Cantorin joukot) Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jono reaalilukuja s.e. $0 < x_n < \frac{1}{2}$ kaikilla n. Olkoon $A_1 = [0,1]$ ja induktiolla $A_{n+1} = x_n A_n \cup (x_n A_n + 1 - x_n)$. Olkoon $C(x_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Anna esimerkki (ja perustelut) sellaisista y.o. ehdot toteuttavasta jonosta $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, että

  (7p) $m(C(x_n)) = 0$

  (10p) $m(C(x_n)) > 0$

  (13p) Tutki, ovatko $C(x_n)$ ja $C(y_n)$ homeomorfisia keskenään kun $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ovat mitä tahansa jonoja, jotka toteuttavat y.o. ehdon.

- (20p) Tutustu Hausdorff mittaan 1.54, esittele sen määritelmä ja Lause 1.56 todistuksineen. Jos et tee $\mathbb{R}^n$:ssä, vaan mielivaltaisessa metrisessä avaruudessa, niin +10p. Merkitään $\dim_H(A)$:lla sitä lukua s, josta Lause 1.56 puhuu. Seuraavasta +10000p:

  > Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti. Jokaisella $x \in \mathbb{R}^2$, olkoon $\mathrm{Vis}_x(A) = \{y \in A \mid [x,y] \cap A = \{y\}\}$, missä $[x,y]$ on näiden välinen suljettu jana. Päteekö, että
  > $$m(\{x \mid \dim_H(\mathrm{Vis}_x(A)) > 1\}) = 0?$$