Mitta ja integraali – Viikko 4

Jokainen tehtävä on 5 pisteen arvoinen. Jos tehtävässä on monta kohtaa ((a),(b)...), niin jokaisen kohdalla lukee montako pistettä kyseisestä kohdasta saa.

Ma 11.06.2012

1.1 Anna esimerkki yksinkertaiseta funkiosta, joka ei ole Riemann integroituva (Analyysi II). Muista todistaa, että se on yksinkertainen ja että se ei ole Riemann integroituva.

1.2 Anna esimerkki jonosta yksinkertaisia funktioita $(f_i)_{i=1}^{\infty}$, $f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siten että melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0$ ja $I(f_j) = 1$ kaikilla j.

1.3 Anna esimerkki jonosta yksinkertaisia funktioita $f_1, f_2, \ldots, f_j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle pätee, että $\lim_{j\to\infty} f(x)$ on olemassa kaikilla j (mahd. ∞) ja $\lim_{j\to\infty} I(f_j)$ on olemassa, mutta kuitenkin

$$\lim_{j\to\infty} I(f_j) \neq I(\lim_{j\to\infty} f(x))$$

1.4 Oletetaan, että $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja että $A \setminus B$ on nollamittainen. Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yksinkertainen. Osoita, että $I(f, A) \leqslant I(f, B)$. (Vihje: 3.12)

1.5 Olkoon $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kasvava ja $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että yhdistetty funktio $g \circ f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen. (Vrt. Vko 3 teht. 3.1.(d))

1.6 Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mitallisia joukkoja $\mathbb{R}^n$:ssä. Oletetaan, että jokainen $\mathbb{R}^n$:n piste kuuluu korkeintaan p:hen joukkoon A_j. Osoita, että

$$pm(A) \geqslant \sum_{i=1}^{k} m(A_i),$$

missä $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$.

Ti 12.06.2012

2.1 Olkoon $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 \leqslant f \leqslant 1$. Oletetaan lisäksi, että $f(x) = 0$ kun $x \notin [0,1]^n$. Osoita, että $\int f \leqslant 1$.

2.2 Olkoot $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yksinkertaisia ja oletetaan, että

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että $I(f) \leqslant I(g)$. (Vihje: 3.12)

2.3 (a) Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen ja $m(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$. Osoita, että $I(f) > 0$

(b) Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on mitallinen ja $m(\{x \mid f(x) > 0\}) > 0$. Osoita, että $\int f > 0$

2.4 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio ja $f \geqslant 0$. Oletetaan lisäksi, että $a = m(\{x \mid f(x) > 1\}) > 0$. Osoita, että $\int f \geqslant a$.

2.5 Myös ei-mitalliselle funktiolle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voidaan määritellä

$$\int^* f = \sup\{I(g) \mid g \in Y, g \leqslant f\}.$$

Kuitenkin edellisen tehtävän (2.4) väite ei välttämättä päde, jos f ei ole mitallinen. Jos teit edellisen tehtävän, niin missä kohtaa todistusta käytit funktion f mitallisuutta?

2.6 (Oleellisesti tehtävät 1.4 ja 2.2 integraalille):

(a) Oletetaan, että $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ja että $A \setminus B$ on nollamittainen. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mitallinen. Osoita, että $\int_A f \leqslant \int_B f$. (Vihje: 3.18)

(b) Olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallisia ja oletetaan, että

$$m(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\}) = 0.$$

Osoita, että $\int f \leqslant \int g$. (Vihje: 3.18)

Ke 13.06.2012

3.1 Laske raja-arvo

(a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx$

(b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_1^{2012} \sqrt{x^2 - e^{-k(x-1)}} dx$

3.2 Laske raja-arvo

(a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + \sin^k x}} dx$

(b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^1 e^{-x^k} dx$

3.3 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \dot{\mathbb{R}}$ mitallinen ja $f \geqslant 0$. Jokaiselle mitalliselle $A \subset \mathbb{R}^n$ määritellään $\mu(A) = \int_A f$. Osoita, että $(\mathbb{R}^n, Leb(\mathbb{R}^n), \mu)$ on mitta-avaruus. (Määritelmä 1.48)

3.4 Olkoot $f_j\colon E \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita siten että $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$ ja $\int_E f_1 < \infty$. Osoita, että

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j \geqslant \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Tämä on ns. laskeva MKL. Vihje: $g_j(x) = f_1(x) - f_j(x)$ ja MKL.

3.5 Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x + e^{k(x-1)}}} dx.$$

Vihje[1].

3.6 Vanha koetehtävä (10.08.2004): Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x + n\sqrt{x}}{1 + nx} dx = 2.$$

To 14.06.2012

4.1 Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1 + \sin(nx)}{nx} dx$$

Vihje: t. 3.4.

Seuraavat ovat vanhoja koetehtäviä:

4.2 (18.06.2004) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(xt)dt$$

on jatkuva. Vihje: osoita, että $\lim_{z\to x^+} g(z) = g(x) = \lim_{z\to x^-} g(z)$ käyttämällä jonoja, eli sitä tietoa, että $\lim_{z\to x^+} g(z) = a$ jos ja vain jos kaikilla kasvavilla jonoilla $z_k \to x$ pätee $\lim_{k\to\infty} g(z_k) = a$.

4.3 (14.04.2005) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2) dx = 0.$$

[1] $\lim \int_0^\infty f = \lim \int_0^1 f + \lim \int_1^\infty f$, MKL ja tehtävät 3.1(a) ja 3.4.

4.4 (10.08.2005) Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

4.5 (9.8.2007) Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx$$

4.6 (Kesäkurssi 2009) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään kuvaus $f_n \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x, y) = \cos(nx)e^{-ny^4}$. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} f_n dm_2(x, y).$$