Mitta ja integraali – Viikko 3

Jokainen tehtävä on 5 pisteen arvoinen. Jos tehtävässä on monta kohtaa ((a),(b)...), niin jokaisen kohdalla lukee montako pistettä kyseisestä kohdasta saa.

Ma 04.06.2012

1.1,1.2 Tässä tehtävässä tutkitaan sitä, miten ulkomitan määritelmässä avoimien n-välien kokoelma voidaan korvata muulla kokoelmalla joukkoja ilman että tulos muuttuu, mm. todistetaan, että suljettujen n-välien kokoelma käy.

Olkoon $\mathcal{X}$ joku kokoelma $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja, joka peittää $\mathbb{R}^n$:n, $\mathbb{R}^n \subset \bigcup X$, ja jonka alkiot ovat positiivimittaisia, $m_n^*(A) > 0$ kaikilla $A \in X$. Määritellään

$$m_n^{\mathcal{X}}(A) = \inf\{\sum_{I \in \mathcal{F}} m_n^*(I) \mid \mathcal{F} \text{ peittää } A\text{:n ja } \mathcal{F} \subset \mathcal{X}\}.$$

Koska $m_n^*(I) = \ell(I)$, tiedämme, että jos $\mathcal{A}$ on kaikkien avointen n-välien kokoelma, niin kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n^*(B) = m_n^{\mathcal{A}}(B)$.

(a) (4p) Osoita, että riippumatta $\mathcal{X}$:stä kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n^*(B) \leqslant m_n^{\mathcal{X}}(B)$.

(b) (2p) Osoita, että jos $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, niin $m_n^*(B) = m_n^{\mathcal{X}}(B)$ kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$.

(c) (2p) Osoita, että jos kaikilla $I \in \mathcal{A}$ on olemassa $J \in \mathcal{X}$ siten että $I \subset J$ ja $m_n^*(I) = m_n^*(J)$, niin $m_n^*(B) = m_n^{\mathcal{X}}(B)$ kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$.

(d) (2p) Osoita, että jos $\mathcal{S}$ on suljettujen välien kokoelma, niin $m_n^*(B) = m_n^{\mathcal{S}}(B)$ kaikilla $B \subset \mathbb{R}^n$. Voit käyttää tietoa, että jos I on avoin n-väli, niin $\ell(I) = m_n^*(I) = m_n^*(\bar{I})$ ja että $\bar{I}$, n-välin I sulkeuma, on suljettu n-väli.

1.3 (Pruju 1.39) Osoita, että n-välien leikkaus on n-väli tai tyhjä. (Pruju 1.41) Osoita, että jokainen avoin joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva yhdiste avoimia n-välejä.

1.4 (a) (1p) Olkoon X mikä tahansa joukko. Osoita, että X:n potenssijoukko, eli kaikkien X:n osajoukkojen kokoelma, on σ-algebra.

(b) (4p) Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien nollamittaisten ja täysimittaisten $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen kokoelma,

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid m(A) = 0 \text{ tai } m(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0\}.$$

Osoita, että $\mathcal{A}$ on σ-algebra

1.5 Missä virhe? **Väite:** $m_1^*(\mathbb{R}) = 0$. **Todistus:** Olkoon $k \in \mathbb{Z}$ ja $\varepsilon > 0$. Olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sellainen, että $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Määritellään avoin väli $I_{k,\varepsilon} = \left]\frac{k-1}{2n_\varepsilon}, \frac{k+1}{2n_\varepsilon}\right[$. Nyt

$$\ell(I_{k,\varepsilon}) = \frac{k+1}{2n_\varepsilon} - \frac{k-1}{2n_\varepsilon} = \frac{2}{2n_\varepsilon} = \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Toisaalta $\mathcal{F}(\varepsilon) = \{I_{k,\varepsilon} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on $\mathbb{R}$:n Lebesguen peite. Koska $\ell(I_{k,\varepsilon})$ menee kohti nollaa, kun $\varepsilon \to 0$, niin myös $\sum_{I \in \mathcal{F}(\varepsilon)} \ell(I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \ell(I_{k,\varepsilon}) \to 0$. Koska $m_1^*(\mathbb{R})$ on näiden summien infimum, on senkin oltava 0. $\square$

1.6 Osoita seuraavista joukoista, että ne on Lebesgue-mitallisia ja laske niiden mitta (vihje: voit käyttää lauseita 1.41, 1.29 ja 1.66 sekä Analyysi II:n tietoja).

(a) (1p) $A \subset \mathbb{R}^2$ ja $A = [-1,1] \times \left]-1,1\right[$.

(b) (1p) $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = B(\bar{0},1)$.

(c) (1p) $A \subset \mathbb{R}$, A on niiden reaalilukujen joukko, joiden desimaalikehitelmä alkaa $1,213\ldots$,

(d) (1p) $A \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{(x,y) \mid |y| < x^2, 0 < x < 5\}$

(e) (1p) $A \subset \mathbb{R}$, A on niiden reaalilukujen joukko, joiden desimaalikehitelmä sisältää pelkkiä kolmosia jostain eteenpäin.

Ti 05.06.2012

2.1 (Kertausta.) Osoita, että funktiolle $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(a) f on kaikkialla jatkuva, eli kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten että $fB(x, \delta) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

(b) Jokaisen avoimen joukon V alkukuva $f^{-1}V$ on avoin.

(c) Jokaisen suljetun joukon W alkukuva $f^{-1}W$ on suljettu.

2.2 Osoita, että jos joukko $C \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, niin $fC \subset \mathbb{R}^m$ on kompakti. Kompaktilla tarkoitamme sellaista joukkoa C, että jokaisella C:n avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

2.3 Anna esimerkki

(a) (1p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka ei ole mitallinen (vihje: L.1.68).

(b) (2p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen, mutta ei jatkuva,

(c) (2p) kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja kompaktista joukosta $C \subset \mathbb{R}$ s.e. f on mitallinen ja fC ei ole kompakti.

2.4 (a) (2p) Osoita (tarkemmin, kuin monisteen Esimerkissä 2.8), että jos joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ karakteristinen funktio on mitallinen, niin E on mitallinen.

(b) (3p) Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f, g\colon A \to \mathbb{R}^m$ ovat mitallisia, niin funktioiden tulo fg, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, on mitallinen (Lause 2.11).

2.5 (Tätä olemme jo käyttäneet monta kertaa). Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}$. Oletetaan, että kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten että $a < b + \varepsilon$. Osoita, että $\inf A \leqslant \inf B$. (Vrt. esim. Huomautus 1.7(3), Lemma 1.37, Lemma 1.39...)

2.6 Osoita, että seuraavissa f on mitallinen kuvaus:

(a) (1p) $f(x)$ on reaaliluvun x kokonaislukuosa, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(b) (2p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f(x) = x^2$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja 0 muulloin,

(c) (2p) Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mikä tahansa kuvaus ja $g(x) = f(x)$, kun $x^2 \in \mathbb{Z}$ ja $g(x) = \sqrt[3]{x}$ muuten.

Ke 06.06.2012

3.1 Osoita seuraavista kuvauksista, että ne ovat mitallisia:

(a) (1p) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_2$,

(b) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$, $f(x) = x^{-1}$, kun $x \neq 0$ ja $f(0) = \infty$

(c) (1p) $A \subset \mathbb{R}$ on mitallinen joukko ja $f\colon \mathbb{R} \to \dot{\mathbb{R}}$ on määritelty kaavalla

$$f(x) = m(A \cap \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}).$$

(d) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kasvava.

(e) (1p) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \infty$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$, kun $x \notin \mathbb{Q}$.

3.2 Anna esimerkki sellaisesta m_2-mitallisesta funktiosta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, että $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla $g(x) = f(x, 0)$, ei ole m_1-mitallinen. Vihje alaviitteessä.[1]

3.3 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että joukko $\{x \in A \mid f(x) > q\}$ on mitallinen jokaisella $q \in \mathbb{Q}$. Osoita, että

(a) (2p) A on mitallinen

(b) (3p) f on mitallinen

3.4 Olkoon $B \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon B \to \mathbb{R}$ mitallinen. Olkoon

$$A_r = \{x \in B \mid f(x) > r\},$$

kun $r \in \mathbb{R}$. Osoita:

(a) (1p) $A_0 = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+} A_r$

(b) (2p) A_r ovat kaikki mitallisia, $r > 0$.

(c) (2p) jos $m_n(A_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $r > 0$, että $m_n(A_r) > 0$.

3.5 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että on olemassa joukot $B_1, B_2, \ldots$ siten, että $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ja rajoittumakuvaus $f \restriction B_i$ on mitallinen jokaisella i. Osoita, että f on mitallinen.

3.6 Laske $\limsup_{k\to\infty} a_k$ ja $\liminf_{k\to\infty} a_k$ kun

(a) (1p) $a_k = (-1)^k$,

(b) (1p) $a_{k+1} = a_k^2$ ja $a_1 = 2$,

(c) (1p) $a_{k+1} = (-2) \cdot a_k$ ja $a_1 = -2$,

(d) (2p) $a_k = \sin(q_k)$, missä $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ on kaikkien rationaalilukujen numerointi.

[1] Vaikka $E \subset \mathbb{R}$ olisi ei-(m_1)-mitallinen, $E \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ on kuitenkin (m_2)-nollamittainen, eli mitallinen.

To 07.06.2012

4.1 Onko $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yksinkertainen, kun:

(a) (1p) $f(x) = |\sin x|$,

(b) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(c) (1p) $E \subset \mathbb{R}$ on ei-mitallinen ja $f(x) = 1$ kun $x \in E$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(d) (1p) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, eli x:n kokonaislukuosa,

(e) (1p) $f(x) = -1$, kun $x > 0$ ja $f(x) = 1$ muuten?

4.2 Osoita, että jos funktio $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen ja jatkuva, niin se on vakiofunktio. Vihje.[2]

4.3 Olkoon $f_1, f_2, \ldots$ jono mitallisia funktioita $A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että niiden pisteiden $x \in A$ joukko, joilla raja-arvo $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ on olemassa on mitallinen. (Vihje: Lauseet 2.12 ja 2.14.)

4.4 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $f_j\colon A \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ jono mitalliseia funktioita.

(a) (2p) Osoita, että joukot $A_j = \{x \in A \mid f_{j+1}(x) > f_j(x)\}$ ovat mitallisia kaikilla $j \in \mathbb{N}$,

(b) (3p) Osoita, että joukko $\{x \in A \mid$ jono $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ on aidosti kasvava$\}$ on mitallinen.

4.5 Laske $I(f)$, kun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on määritelty seuraavilla tavoilla:

(a) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(b) (1p) $f(x) = 1$, kun $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ ja $f(x) = 0$ muuten,

(c) (1p) $f(x) = 0$, kun $x \notin \mathbb{Z}$ ja $f(x) = \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{Z}$,

(d) (2p) $f(x) = g(x) + h(x)$ sekä tiedetään, että g ja h ovat yksinkertaisia ja $I(g) = G$ ja $I(h) = H$.

4.6 Osoita, että

(a) (2p) $(\sin x)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ m.k. x,

(b) (2p) jos f ja g ovat yksinkertaisia ja $f(x) = g(x)$ m.k. x, niin $I(f) = I(g)$,

(c) (1p) jos $k \in \mathbb{N}$, niin on olemassa alkuluvut p ja q s.e. $p + q = 2k$.

[2]Bolzano.