Mitta ja integraali – Viikko 2

Jokainen tehtävä on 5 pisteen arvoinen. Jos tehtävässä on monta kohtaa ((a),(b)...), niin jokaisen kohdalla lukee montako pistettä kyseisestä kohdasta saa.

Ma 28.05.2012

1.1 (a) (3p) Osoita, että jos $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, niin $m^*(A) \leqslant m^*(B)$

(b) (2p) Anna esimerkki joukoista $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \neq B$ ja $m^*(A) = m^*(B)$. (Todistuksineen.)

1.2 Olkoon $\mathcal{F}$ joukon $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ äärellinen Lebesguen peite (siinä on äärellinen lukumäärä avoimia välejä). Osoita, että silloin $\sum_{A \in \mathcal{F}} m_1^*(A) \geqslant 1$. Missä kohtaa päättelyssä tulee käyttöön oletus, että välejä on äärellinen määrä? Minkä tärkeän ulkomitan määritelmää koskevan havainnon tästä esimerkistä voi tehdä? Vihje alaviitteessä.[1]

1.3 Osoita, että joukon $G \subset \mathbb{R}^3$ ulkomitta on nolla, kun

(a) (1p) $G = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B^2(0, r)\}$ jollain vakiolla r. Eli G on "litteä kiekko", jonka säde on r.

(b) (2p) $G = \{(x, y, C) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, jollain vakiolla $C \in \mathbb{R}$,

(c) (2p) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Q}\}$.

1.4 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $B_k \subset \mathbb{R}^n$ s.e. $A \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ja $m_n^*\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = m_n^*(A)$.

1.5 Osoita suoraan ulkomitan määritelmästä, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n^*(A) = m_n^*(A \cup \{x\})$.

1.6 Osoita suoraan mitallisuuden määritelmästä, että seuraavat joukot ovat $\mathbb{R}$:n mitallisia osajoukkoja:

(a) (1p) $\mathbb{R}$,

(b) (1p) $\varnothing$,

(c) (1p) $\{1\}$,

(d) (2p) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

[1] Tarkastele alkioiden $A \in \mathcal{F}$ sulkeumia ja sitä havaintoa, että tämä ei muuta summan arvoa, koska $\mathcal{F}$ on äärellinen.

Ti 29.05.2012

2.1 Osoita että seuraavat $\mathbb{R}^n$:n osajoukot ovat mitallisia:

(a) (1p) $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ ja $n = 1$,

(b) (1p) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ja $n = 1$,

(c) (1p) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja $n = 2$.

(d) (2p) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{Z} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ja $n = 1$,

Saat käyttää aikaisempien tehtävien ja luentojen tuloksia, mutta voit myös todistaa suoraan määritelmästä.

2.2 Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on bijektio.

(a) (2p) Osoita, että kaikilla $A, B \subset \mathbb{R}^n$ pätee $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(b) (3p) Oletetaan lisäksi, että kaikilla $A \subset \mathbb{R}^n$ pätee $m_n^*(fA) = m_n^*(A)$. Osoita, että jos $X \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, niin fX on mitallinen.

2.3 S. Banach ja A. Tarski todistivat vuonna 1924, että $\mathbb{R}^3$:n suljettu kuula $B = B(\bar{0}, 1)$ voidaan jakaa viiteen erilliseen osaan $B = \bigcup_{i=1}^5 A_i$ siten, että uudelleenjärjestämällä nämä osat, saadaan kaksi erillistä kuulaa,

$$B(\bar{0}, 1) \cup B(x, 1) = \bigcup_{i=1}^{5} T_i(A_i), \quad x = (5, 0, 0)$$

missä T_i on siirron ja kierron yhdiste, eli $T_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $T_i(x) = M_i x + v_i$, missä M_i on ortonormaali 3×3-matriisi (kierto) ja $v_i \in \mathbb{R}^3$. **Osoita, että (a) (4p) ainakin yksi näistä osista A_i on ei-mitallinen ja (b) (1p) itse asiassa vähintään kaksi niistä ovat ei-mitallisia** Voit käyttää hyväksi sitä tietoa, että kierto säilyttää mitan, eli $m_3^*(X) = m_3^*(MX)$, missä M on mikä tahansa ortonormaali 3×3-matriisi ja $MX = \{Mx \mid x \in X\}$ sekä edellistä tehtävää.

2.4 Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, eli on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.

(a) (2p) Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}$ on nollamittainen. Osoita, että myös fA on nollamittainen.

(b) (2p) Osoita, että suljetulle välille rajoitettu käyrä $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-r, r]\}$ on nollamittainen.

(c) (1p) Osoita käyttämällä kohtia (a) ja (b), että $\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ nollamittainen (vrt. viikon 1 teht. 4.2(c))

2.5 Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikkialla derivoituva ja sen derivaatta on jatkuva, eli $f \in C^1(\mathbb{R})$. Osoita, että käyrä $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ on nollamittainen. Vihje alaviitteessä.[2].

2.6 Osoita, että jos $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on mikä tahansa jono $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, niin

(a) $m_n^*(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leqslant \inf\{m_n^*(A_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$,
(b) $m_n^*(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \geqslant \sup\{m_n^*(A_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Ke 30.05.2012

3.1 Olkoon $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ jono erillisiä mitallisia joukkoja, eli $E_i \cap E_j = \varnothing$ kaikilla $i \neq j$. Osoita, että $m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$.

3.2 Tästä tehtävässä on jaossa max 6 pistettä ja seuraavasta max 4 pistettä.

(a) (2p) Oletetaan, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on nollamittainen ja $A \subset \mathbb{R}^n$ on sellainen että $A \cup E$ on mitallinen. Osoita, että A on mitallinen.
(b) (2p) Oletetaan että $V \subset \mathbb{R}^n$ ja reuna $\partial V = \overline{V} \cap (\overline{\mathbb{R}^n \setminus V})$ on nollamittainen. Osoita, että V on mitallinen.
(c) (1p) Anna esimerkki mitallisesta joukosta $W \subset \mathbb{R}^n$, jolle $m^*(\partial W) > 0$.

3.3 Osoita, että seuraavat ovat Borel joukkoja:

(a) (1p) $[a, b[\subset \mathbb{R}$, kun $a < b$.
(b) (1p) $\{(n, m) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$
(c) (3p) niiden reaalilukujen joukko, joiden desimaalikehitelmässä esiintyy Kaarlon puhelinnumero.

3.4 Osoita, että seuraavat ovat Borel joukkoja:

(a) (1p) Niiden reaalilukujen joukko, joiden desimaalikehitelmä alkaa näin: $0.4\ldots$.
(b) (2p) Niiden reaalilukujen joukko, joiden 17:sta desimaali on 4,
(c) (2p) niiden reaalilukujen joukko, joiden desimaalikehitelmässä esiintyy äärettömän monta kertaa numero 4.

3.5, 3.6 Yksityiskohtia todistuksista, suluissa luentomonisteen numerot.

(a) (1p) Osoita, että jos A ja B ovat erillisiä $A \cap B = \varnothing$ ja mitallisia, niin $m^*(A \cup B) = m^*(A) \cup m^*(B)$.

[2] Edellinen tehtävä, DVAL, Weierstrass minmax

(b) (1p) (1.22) jos E on nollamittainen, niin $A \cap E$ on nollamittainen.

(c) (1p) (1.24) Jos A on numeroituva, niin se on nollamittainen.

(d) (1p) (1.24) Osoita, että $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on mitallinen,

(e) (1p) (1.25) Osoita, että kaikilla $A, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ pätee $(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap (E_1 \cup E_2)$

(f) (2p) (1.28) Oletetaan, että $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on jono joukkoja ja määritellään F_i induktiolla: $F_1 = E_1$ ja $F_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Osoita, että (i) $F_i \cap F_j$ kaikilla $i \neq j$ ja (ii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

(g) (2p) (1.35) Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *karakteristinen funktio* χ_A on määritelty seuraavasti:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A, \end{cases}$$

(i) Osoita, että jos I on avoin väli, niin $\ell(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(xdx)$. (ii) Osoita, että jos $\mathcal{F}$ on joukon A äärellinen peite, niin $\sum_{I\in\mathcal{F}} \chi_I(x) \geqslant 1$ kaikilla $x \in A$.

To 31.05.2012

4.1 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ jatkuva ja oletetaan, että A on Borel. Osoita, että

(a) (4p) $f^{-1}A$ on Borel,

(b) (1p) $f^{-1}A$ on mitallinen.

4.2 Olkoon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sanotaan, että f on *jatkuva pisteessä* $x \in \mathbb{R}^n$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta(\varepsilon, x)$ s.e. $fB(x, \delta(\varepsilon, x)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Määritellään kaikilla k joukko

$$G_k = \bigcup \{B(x, \delta(\frac{1}{k}, x)) \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}.$$

(a) (1p) Osoita, että G_κ on avoin.

(b) (2p) Osoita, että jos $y \in G_k$, niin on olemassa sellainen δ, että $B(y, \delta) \subset B(f(y), \frac{1}{k})$

(c) (2p) Osoita, että $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$, eli joukko $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$ on Borel-joukko.

Extra: (0p) Yllä olevasta tehtävästä itse asiassa seuraa, että $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$ on numeroituva leikkaus avoimista joukoista, joten jos se on tiheä, niin se on numeroituva leikkaus avoimista ja tiheistä joukoista, eli se on *co-meager*, eli sen komplementti on laiha (Topologia II). Tästä seuraa, että tämä joukko ei voi olla esimerkiksi rationaalilukujen joukko,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\} \neq \mathbb{Q},$$

koska $\mathbb{Q}$ on laiha, joten sen komplementti ei voi olla myös laiha. Toisaalta $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva pisteessä } x\}$ *voi* olla irrationaalilukujen joukko: esimerkiksi seuraava funktion on jatkuva täsmälleen irrationaalilukujen joukossa: $f(x) = 0$, kun x on irrationaalinen ja $f(n/m) = 1/m$, kun $x = n/m$ on rationaaliluku sievennetyssä muodossaan.

4.3 Olkoon A_j, $j \in J$ erilissiä mitallisia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja. joille $m_n(A_j) > 0$ kaikilla $j \in J$.

(a) (2p) Osoita, että kaikilla r, joukko $\{j \in J \mid m_n(A_j \cap B(\bar{0}, r)) > 0\}$ on numeroituva. (Vihje: viikon 1. teht. 2.5.)

(b) (3p) Osoita, että J on numeroituva.

4.4 Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$.

(a) (2p) Osoita, että jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy avoin $B \supset E$ siten että $m_n(B) < m_n^*(E) + \varepsilon$

(b) (3p) Osoita, että jokaisella $\varepsilon > 0$ löytyy suljettu $A \subset E$ siten että $m_n(\mathbb{R}^n \setminus A) < m_n^*(\mathbb{R}^n \setminus E) + \varepsilon$

4.5 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Osoita, että tällöin

(a) (1p) $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa avoin $G \supset A$ s.e. $m(G \setminus A) < \varepsilon$,

(b) (1p) $\forall \varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$ s.e. $m(A \setminus F) < \varepsilon$,

(c) (1p) $m(A) = \inf\{m(G) \mid G \supset A, G \text{ avoin}\}$,

(d) (1p) $m(A) = \sup\{m(F) \mid F \subset A, G \text{ kompakti}\}$.

(e) (1p) Osoita, että $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa mitalliset A ja B, $A \subset E \subset B$ siten että $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

4.6 Osoita, että on olemassa *erilliset* joukot $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$ siten että

$$m_1^*(A \cup B) < m_1^*(A) + m_1^*(B).$$