Mitta ja integraali – Viikko 1

Jokainen tehtävä on 5 pisteen arvoinen. Jos tehtävässä on monta kohtaa ((a),(b)...), niin jokaisen kohdalla lukee montako pistettä kyseisestä kohdasta saa.

Ma 21.05.2012

1.1 Ovatko joukot A ja B samat?

(a) (1p) $A = [-10, 10[\cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]0, n[$, $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]-\infty, 10 - \frac{1}{n}\right] \cap \left[\frac{1}{n}, \infty\right[$,

(b) (1p) $A = f^{-1}\{2, 4, 8, 16, 32\}$, $B = gf\{1, 2, 3, 4, 5\}$, missä $f, g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ovat $f(x) = 2^x$ ja $g(x) = \log_2 x$,

(c) (1p) $A = f\,[-10, 10]$, missä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f(x) = x^3$, ja

$$B = \bigcup_{n=-1000}^{1000} [n, n+1],$$

(d) (2p) $A = f\{y \mid y^2 \in B\}$, missä $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $f(x) = x^2$.

1.2 Sievennä:

(a) (1p) $\displaystyle\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[m - \tfrac{1}{n}, m + \tfrac{1}{n}\right]$,

(b) (1p) $\displaystyle\bigcap_{p\in\mathbb{Q}} [p, \infty[$

(c) (1p) $\displaystyle\bigcap_{x\in A} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]\tfrac{1}{n}, x - \tfrac{1}{n^2}\right]$, missä $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \pi\}$

(d) (2p) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \left[-1 + \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right]$ (vrt. teht. 1.4)

1.3 Jos $A \subset \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}$, merkitään $A + x = \{y + x \mid y \in A\}$. Sievennä:

(a) (1p) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} (\mathbb{Q} + x)$,

(b) (1p) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}} (\mathbb{Q} + x)$,

(c) (1p) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{N} + (-n))$,

(d) (1p) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right[$

(e) (1p) $\bigcap_{x \in \{\sqrt{2}, 5\}} (\mathbb{Q} + x)$.

1.4 Olkoon $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ jono X:n osajoukkoja. Merkitään

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ ja } \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

(a) (1p) Osoita, että $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(b) (2p) Osoita, että $\liminf_{n\to\infty} A_n$ on niiden pisteiden x joukko, että $x \in A_n$ "jostain eteenpäin", eli on olemassa n_0 s.e. $x \in A_n$ kaikilla $n > n_0$.

(c) (2p) Osoita, että $\limsup_{n\to\infty} A_n$ on niiden pisteiden x joukko, jotka kuuluvat äärettömän moneen joukkoon A_n.

1.5 (Jatko edelliselle tehtävälle.) Olkoon $A_n = \left[-1 + \sin(\frac{\pi}{2}n), 1 + \cos(\frac{\pi}{2}n)\right]$. Päteekö

(a) (1p) $0 \in \limsup_{n\to\infty} A_n$?

(b) (1p) $1 \in \liminf_{n\to\infty} A_n$?

(c) (1p) $1 \in \limsup_{n\to\infty} A_n$?

(d) (2p) Määritä $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ja $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

1.6 Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus ja $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ perhe X:n osajoukkoja.

(a) (1p) Osoita, että

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

(b) (2p) Oletetaan, että f on injektio. Osoita, että silloin

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

(c) (1p) Anna esimerkki joukoista X ja Y ja funktiosta $f\colon X \to Y$ sekä joukkoperheestä $(V_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ joille pätee

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) \neq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)$$

(d) (1p) Onko mahdollista, että

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\Big) \neq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} f(V_\alpha)?$$

Ti 22.05.2012

2.1 Onko joukko numeroituva vai ylinumeroituva? (Todista.)

(a) (1p) Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$,

(b) (1p) Reaalilukujen potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,

(c) (1p) Parillisten lukujen joukko $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(d) (2p) $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m, k) \mid n, m, k \in \mathbb{N}\}$

2.2 Onko joukko numeroituva vai ylinumeroituva? (Todista.)

(a) (1p) Kaikki avoimet välit $\{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$,

(b) (2p) Kaikki avoimet välit joiden päätepisteet ovat rationaalilukuja:

$$\{]a, b[\subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\},$$

(c) (1p) Algebrallisten lukujen joukko $A \subset \mathbb{R}$, eli kaikkien kokonaislukukertoimisten polynomien juuret $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0$ jollain polynomilla $P\}$. Eli $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jollain kokonaisluvuilla $a_n, \ldots, a_0$.

(d) (1p) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eli kaikkien funktioiden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko.

2.3 Jos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono, määritellään $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k$ ja $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k$.

(a) (1p) Osoita, että jos $A \subset B$, niin $\sup A \leqslant \sup B$ ja $\inf A \geqslant \inf B$,

(b) (1p) Jos $A, B \subset \mathbb{R}$, olkoon $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Osoita, että $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$

(c) (1p) Anna esimerkki joukoista A ja B joille pätee $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$.

(d) (2p) Osoita, että $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$

2.4 Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja olkoon $A_0 = \{f(0)\}$ ja kaikilla $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = fA_n$. Määritellään $A_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

(a) (2p) Osoita, että A_f on numeroituva,

(b) (2p) Osoita, että $f[A_f] \subset A_f$, eli A_f on *suljettu f:n suhteen.*

(c) (1p) Mitä on A_f, jos $f(x) = 2^x$?

2.5 Olkoon a_i, $i \in I$, positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että $\sum_{i\in I} a_i < \infty$. Osoita, että indeksijoukko I on tällöin numeroituva.

2.6 Jos $I =]a, b[$ on avoin väli, $a < b$, olkoon $m(I) = b - a$ välin pituus. Olkoon $\mathcal{F}$ sellainen kokoelma avoimia välejä, että $[0,1] \cup [2,3] \subset \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$. Osoita, että $\sum_{A\in\mathcal{F}} m(A) \geqslant 2$. Vihje alaviittessä.[1] Tässä tullaan lähelle mittateoriaa!

Ke 23.05.2012

3.1 Olkoon $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$. Piirrä kuvia joukoista

$$A = \bigcup_{x\in S^1} \bar{B}(x,\varepsilon) \text{ ja } B = \bigcap_{x\in S^1} \bar{B}(x,\varepsilon)$$

eri ε:n arvoilla. Onko A suljettu? Entä B? Jos korvataan suljetut kuulat yllä avoimilla, niin ovatko A ja B suljettuja/avoimia?

3.2 Osoita, että

(a) (1p) joukko $\{B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_+\}$ on numeroituva,

(b) (1p) jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin A voidaan esittää yhdisteenä avoimista kuulista: $A = \bigcup_{i\in I} B_i$.

(c) (3p) jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin A voidaan esittää **numeroituvana** yhdisteenä avoimista kuulista: $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

3.3 Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *peite* on perhe $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja $\mathcal{F}$ siten että $A \subset \bigcup \mathcal{F}$. *Avoin* peite on sellainen peite, jonka jokainen jäsen on avoin joukko. Jos $\mathcal{F}$ on joukon A peite ja $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ ja $\mathcal{K}$ on myös A:n peite, niin sanotaan, että $\mathcal{K}$ on $\mathcal{F}$:n *osapeite*. Todista Lindelöfin lause: jokaisella $\mathbb{R}^n$:n avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.

[1] Käytä kompaktiutta.

3.4 Osoita, että

(a) (1p) suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu,

(b) (1p) avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin,

(c) (1p) avoin kuula $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko,

(d) (2p) suljettu kuula $\bar{B}(x,r)$ on suljettu joukko.

3.5 Anna esimerkki

(a) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ on suljettu muttei avoin,

(b) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ei ole suljettu eikä avoin,

(c) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ on avoin muttei suljettu,

(d) (1p) avoimista joukoista A_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ on avoin ja suljettu,

(e) (1p) suljetuista joukoista C_i, $i \in \mathbb{N}$ joilla $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ on avoin.

3.6 (Vrt. teht. 2.6) Jos $a < b$ ja $I =]a,b[$ on avoin väli, olkoon $m(I) = b - a$ välin pituus.

(a) (2p) Osoita, että jokaisella ε on olemassa joukon $[0,1] \cup [2,3]$ peite $\mathcal{F}$, joka koostuu avoimista väleistä, siten että $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{F}} m(A) < 2 + \varepsilon$.

(b) (3p) Osoita, että jos A on numeroituva, niin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa avoimien välien kokoelma $\mathcal{F}$, joka on A:n peite ja $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{F}} m(A) < \varepsilon$.

To 24.05.2012

4.1 Osoita, että $m_n^*(A) = 0$, kun

(a) (1p) $A = \varnothing$,

(b) (2p) $A = \{(x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$ on suora (x-akseli) $\mathbb{R}^n$:ssä ja $n > 1$.

(c) (2p) $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva, (vihje: tehtävä 3.6).

4.2 Osoita, että $m_n^*(A) \leqslant 10$, kun

(a) (1p) $n = 3$ ja $A = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$,

(b) (1p) $n = 5$ ja $A = B(0, \frac{1}{2})$,

(c) (1p) $n = 2$ ja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,

(d) (2p) $n = 1$ ja $A = [0, 10]$.

4.3 Kun $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, merkitään $A + x = \{y + x \in \mathbb{R}^n \mid y \in A\}$ ja jos $t \in \mathbb{R}$, niin $tA = \{ty \in \mathbb{R}^n \mid y \in A\}$. Osoita, että

(a) (2p) $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$,

(b) (3p) $m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A)$.

4.4 Osoita, että $m_1^*([0, 1]) \cup [2, 3] = 2$. Vihje: käytä apuna tehtäviä 2.6 ja 3.6(a). Voit saada tästä tehtävästä pisteitä vain jos olet tehnyt nämä tehtävät, teet ne nyt tai ratkaiset tämän vetoamatta niihin.

4.5 Olkoon $A \subset B^2(\bar{0}, 2)$. Osoita, että

(a) (2p) $m_2^*(A) \leqslant m^*([-10, 10] \times [-10, 10])$

(b) (3p) $m_2^*(A) \leqslant m^*([0, 10] \times [-10, 10])$

4.6 Yksityiskohtia Lemmojen 1.13 ja 1.14 todistuksista ja siihen liittyvää:

(a) (1p) Olkoon $A \subset I \times J$ äärellinen. Osoita, että löytyy äärelliset $I' \subset I$ ja $J' \subset J$ siten että $A \subset I' \times J'$,