Mitta ja integraali – Viikko 4, Malliratkaisut: torstai

To 14.06.2012

4.1 Laske

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{1+\sin(nx)}{nx}dx$$

Vihje: t. 3.4.

Ratkaisu: Todistamme, että jokaisella n, integraalin

$$\int_1^\infty \frac{1+\sin(nx)}{nx}dx$$

arvo on ääretön. Tästä seuraa tietenkin, että tehtävän raja-arvo on myös ääretön.

Kiinnitetään siis $n \in \mathbb{N}$. Jokaseilla $k \in \mathbb{N}$ pätee, että jos $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, niin

$$\frac{1}{nx} \geqslant \frac{1}{n(2k+1)\pi}. \tag{$*$}$$

Lauseiden 3.18 (2) ja 3.32 (ii) nojalla pätee että

$$\int_1^\infty \frac{1+\sin(nx)}{nx}dx \geqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{1+\sin(nx)}{nx}dx \tag{$**$}$$

ja edelleen $(*)$:n ja lauseen 3.18 (1) nojalla

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{1+\sin(nx)}{nx}dx \geqslant \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{n(2k+1)\pi}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}(1+\sin(nx))dx\right). \tag{$***$}$$

Viimeinen integraali on helppo laskea:

$$\begin{aligned}
\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}(1+\sin(nx))dx &= \Big/_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x + \frac{-\cos(nx)}{n} \\
&= ((2k+1)\pi + \frac{-\cos(n(2k+1)\pi)}{n}) - (2k\pi + \frac{-\cos(n\cdot 2k\pi)}{n}) \\
&= \pi - \frac{\cos(n(2k+1)\pi)}{n} + \frac{\cos(n\cdot 2k\pi)}{n}) \\
&= \pi - \frac{\cos(n(2k+1)\pi)}{n} + \frac{\cos(n\cdot 2k\pi)}{n})
\end{aligned}$$

Nyt jos n on pariton, niin $\cos(n(2k+1)\pi) = -1$ ja $\cos(n \cdot 2k\pi) = 1$, ja jos n on parillinen, niin $\cos(n(2k+1)\pi) = \cos(n \cdot 2k\pi) = 1$. Eli parillisilla n vastaukseksi tulee $\pi + \frac{2}{n}$ ja parittomilla π, mutta joka tapauksessa se on vähintään π. Eli

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} (1 + \sin(nx))dx \geqslant \pi.$$

Tästä seuraa $(**) : n$ ja $(***)$:n nojalla, että

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{1 + \sin(nx)}{nx} dx \\
\geqslant\ & \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{n(2k+1)\pi} \underbrace{\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} (1 + \sin(nx))dx}_{\geqslant \pi} \right) \\
\geqslant\ & \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n(2k+1)} \\
=\ & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k+1} \\
\geqslant\ & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k+2} \\
=\ & \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

ja viimeisen summan arvo on ääretön, koska se on yhtä termiä vaille harmoninen sarja (Analyysi I/II).

4.2 Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva. Osoita, että funktio $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(xt) dt$$

on jatkuva.

Ratkaisu: Topologia I: funktio $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä z jos ja vain jos

$$\lim_{x \to z^+} g(x) = g(z) = \lim_{x \to z^-} g(x).$$

Edelleen, $\lim_{x\to z^+} g(z) = a$ jos ja vain jos kaikilla kasvavilla jonoilla $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ pätee $g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, ja $\lim_{x\to z^-} g(z) = a$ jos ja vain jos kaikilla laskevilla jonoilla $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ pätee $g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kasvava jono, jonka raja-arvo on z. Täytyy osoittaa, että $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(z)$, eli että

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(x_n t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(zt).$$

f on oletuksen mukaan integroituva, eli lauseen 3.36 mukaan myös $|f|$ on integroituva. Lisäksi $f(t)\sin(x_n t) \leqslant |f(t)|$ kaikilla n ja kaikilla t. Voidaan siis soveltaa dominoidun konvergenssin lausetta (DKL), Lause 3.45 ja saadaan:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(x_n t) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f(t)\sin(x_n t).$$

Koska sinifunktio on jatkuva, pätee $\lim_{n\to\infty} f(t)\sin(x_n t) = f(t)\sin(zt)$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(x_n t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(zt) = g(z),$$

mikä oli todistettavana.

Samalla tavalla näytetään, että $g(z) = \lim_{x\to z^-} g(x)$ käyttämällä laskevia jonoja.

4.3 Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2) dx = 0.$$

Ratkaisu: Määritelmän mukaan

$$\int_1^n e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2) dx = \int_1^{\infty} e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2)\chi_{[1,n]} dx.$$

Koska sekä $\sin(n+x^2)$ että $\chi_{[1,n]}$ ovat itseisarvoltaan korkeintaan 1, ja $e^{-n\sqrt{x}} \leqslant e^{-\sqrt{x}}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, pätee

$$|e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2)\chi_{[1,n]}| \leqslant e^{-\sqrt{x}}. \qquad (*)$$

Yksi tapa nähdä että viimeinen on integroituva on integroida se sijoituksella: sijoitetaan $u = \sqrt{x}$, jolloin $dx = 2udu$ ja

$$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_1^{\infty} 2ue^{-u} du$$

Osittaisintegroidaan:

$$\begin{aligned}
&= \left(\Big/_{1}^{\infty} -2ue^{-u} \right) - \int_1^\infty 2e^{-u} du \\
&= \frac{2}{e} - \Big/_{1}^{\infty} 2e^{-u} \\
&= \frac{2}{e} + \frac{2}{e} \\
&= \frac{4}{e} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Toinen, vähän yleisempi tapa nähdä, että $e^{-\sqrt{x}}$ on integroituva, joka pätee moneen muuhunkin eksponentiaalista muotoa olevaan funktioon, on seuraava. Kehittämällä $e^{\sqrt{x}}$ Taylorin sarjaksi nähdään:

$$e^{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^n}{n!} \geqslant \frac{\sqrt{x}^4}{4!} = \frac{x^2}{24},$$

eli

$$e^{-\sqrt{x}} \leqslant \frac{24}{x^2} \tag{$**$}$$

ja viimeinen on tunnetusti integroituva välillä $[1, \infty[$ (Analyysi II). Yhdistämällä $(*)$ ja $(**)$ voidaan soveltaa dominoidun konvergenssin lausetta (DKL), lause 3.45:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2) \chi_{[1,n]} dx = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-n\sqrt{x}} \cos(n + x^2) \chi_{[1,n]} dx.$$

Mutta termi $e^{-n\sqrt{x}}$ menee kohti nollaa kaikilla $x \in [1, \infty[$, kun n kasvaa rajatta, joten integraalin sisällä oleva raja-arvo on nolla, eli integraalikin on nolla.

4.4 Laske raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$$

Ratkaisu: Kuten edellisessä tehtävässä, huomataan ensin, että

$$\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \chi_{[0,n[} dx$$

Jono $x_n = (1 + x/n)^n$ on kasvava, kun $n > |x|$ ja sen raja-arvo on äärellinen (Analyysi I, Hurri-Syrjäsen moniste Lause 4.10), lisäksi määrtelmän mukaan $e = \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$ ja muuttujan vaihdoksella nähdään, että

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n :$$

$$\begin{aligned}
e^x &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/x}\right)^{(n/x)x} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Nyt jokaisella x, jonon $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n[}$ arvot on nolla, kun $n \leqslant |x|$ ja kun $n > |x|$, niin yllä olevan nojalla se on kasvava. Eli se on itse asiassa aina kasvava. Lisäksi jonon jäsenet ovat aina ei-negatiivisia, eli voidaan käyttää monotonisen konvergenssin lausetta (MKL), Lause 3.25:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n[}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n[}dx$$

ja edelleen yllä olevasta saadaan, että

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\chi_{[0,n[}dx = \int_0^\infty e^x e^{-2x}dx = \int_0^\infty e^{-x} = 1.$$

4.5 Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}}dx$$

Ratkaisu: Hajoitetaan integraali kahteen osaan:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = \int_0^1 \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} + \int_1^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}},$$

jolloin myös raja-arvo hajaantuu:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} + \lim_{k\to\infty}\int_1^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}}.$$

Lasketaan nämä kaksi erikseen. Kaikilla positiivisilla y pätee $\sin(y) \leqslant y$. Tämä johtuu siitä, että $\sin(0) = 0$ ja $D \sin y = \cos y \leqslant 1$, joten soveltamalla väliarvolausetta (Analyysi I) nähdään, että $\sin y \leqslant y$ kun $y \geqslant 0$. Joten $\sin(x^k) \leqslant x^k$. Kun $x \leqslant 1$, niin myös $x^k \leqslant x^{k-1}$, eli $\sin(x^k) \leqslant x^{\kappa-1}$, eli $\frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} \leqslant 1$. Soveltamalla tasaisesti rajoitetun konvergenssin (TRKL) lausetta (3.47) saadaan,

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx$$

Lasketaan raja-arvo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = x \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^k}.$$

Raja-arvo $\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y}$ voidaan laskea esim. käyttämällä l'Hospitalin sääntöä (Analyysi I): $\lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos y}{1} = 1$ ja koska jono x^k lähestyy nollaa, kun $0 < x < 1$, niin myös $\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^k} = 1$, eli

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = x.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Kun $x > 1$, x^{k-1} kasvaa rajatta, kun k kasvaa rajatta ja $|\sin(x^k)| \leqslant 1$, joten silloin

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = 0.$$

Toisaalta itseisarvo $|\frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}}|$ on ylhäältä rajoitettu funktiolla $1/x^2$, kun $k > 2$, joka on integroituva välillä $[1, \infty[$. Siis voidaan soveltaa dominoidun konvergenssin lausetta (DKL), Lause 3.45 ja saadaan:

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} = \int_1^\infty \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-1}} dx = \int_1^\infty 0 dx = 0.$$

Vastaus on siis $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

Ratkaisussa käytettiin tietoa siitä, että $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f$ (pisteiden 0 ja 1 kohdalla).

4.6 Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään kuvaus $f_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $f_n(x, y) = \cos(nx)e^{-ny^4}$. Laske

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} f_n dm_2(x, y).$$

Ratkaisu: Tarkastellaan integraalia

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \cos(nx)e^{-ny^4} dm_2(x, y)$$

Integraalin sisällä olevalle termin itseisarvolle pätee:

$$|\cos(nx)e^{-ny^4}| \leqslant e^{-ny^4} \leqslant e^{-y^4}$$

Haluamme osoittaa, että jälkimmäinen on integroituva, eli

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} e^{-y^4} dm_2(x, y) < \infty.$$

Siirtymällä Riemann-integraaliin ja käyttämällä vektorianalyysin tietoja, voidaan kirjoitta

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} e^{-y^4} dm_2(x, y) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^4} dydx.$$

Osoitetaan ensin, että sisempi integraali on äärellinen. Ensin kirjoitetaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^4} dy = \int_{-\infty}^{-1} e^{-y^4} dy + \int_{-1}^{1} e^{-y^4} dy + \int_{1}^{\infty} y^4 dy.$$

Symmetrian nojalla:

$$= \int_{-1}^{1} e^{-y^4} dy + 2\int_{1}^{\infty} e^{-y^4} dy$$

Tämän lausekkeen ensimmäinen termi on äärellinen, koska e^{-y^4}:n suurin arvo välillä $[-1, 1]$ on 1, joten integraali on korkeintaan 2. Kun $y \geqslant 1$, niin $y^4 \geqslant y$ ja $e^{-y^4} \leqslant e^{-y}$, joten voidaan arvioida

$$\int_{-1}^{1} e^{-y^4} dy + 2\int_{1}^{\infty} e^{-y^4} dy \leqslant 2 + 2\int_{1}^{\infty} e^{-y} dy = 2 + 2e < \infty.$$

Toisaalta olisi voinut käyttää Taylorin kehitelmää, kuten tehtävän 4.3 ratkaisussa. Nyt $\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^4} dydx \leqslant \int_0^1 (2 + 2e)dx = 2 + 2e$

Nyt voidaan siis käyttää dominoidun konvergenssin lausetta ja

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}}\cos(nx)e^{-ny^4}dm_2(x,y)=\int_{[0,1]\times\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\cos(nx)e^{-ny^4}dm_2(x,y),$$

joka selvästi menee nollaan melkein kaikilla y.