Mitta ja integraali – Viikko 1, Malliratkaisut: tiistai ja torstai

Ti 22.05.2012

2.1 Onko joukko numeroituva vai ylinumeroituva? (Todista.)

(a) (1p) Kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$,

(b) (1p) Reaalilukujen potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,

(c) (1p) Parillisten lukujen joukko $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(d) (2p) $\mathbb{N}3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m, k) \mid n, m, k \in \mathbb{N}\}$

Ratkaisu.

(a) (Numeroituva.) Numeroituvan joukon osajoukko on numeroituva. Joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva ja $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

(b) (Ylinumeroituva.)Joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva ja kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $x \mapsto \{x\}$ on injektio.

(c) (Numeroituva.) Numeroituvan joukon osajoukko on numeroituva ja $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

(d) (Numeroituva.) Jokaisella luonnollisella luvulla on järjestystä vaille yksikäsitteinen alkulukuhajotelma. Tästä seuraa, että kuvaus

$$f\colon \mathbb{N}3 \mapsto \mathbb{N}$$

$$(x, y, z) \mapsto 2^x 3^y 5^z$$

on injektio, koska $2, 3, 5$ ovat alkulukuja. Siten numeroituvuuden määritelmästä seuraa, että $\mathbb{N}3$ on numeroituva.

2.2 Onko joukko numeroituva vai ylinumeroituva? (Todista.)

(a) (1p) Kaikki avoimet välit $\{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$,

(b) (2p) Kaikki avoimet välit joiden päätepisteet ovat rationaalilukuja:

$$\{]a, b[\subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\},$$

(c) (1p) Algebrallisten lukujen joukko $A \subset \mathbb{R}$, eli kaikkien kokonaislukukertoimisten polynomien juuret $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0 \text{ jollain polynomilla } P\}$. Eli $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ jollain kokonaisluvuilla $a_n, \ldots, a_0$.

(d) (1p) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, eli kaikkien funktioiden $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joukko.

Ratkaisu.

(a) (Ylinumeroituva.) Luentomateriaalin nojalla $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva, ja kuvaus

$$f\colon \mathbb{R} \to \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$$
$$a \mapsto]a, a+1[$$

on injektio. Tästä seuraa luentomateriaalin nojalla, että joukon $\{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ mahtavuus on vähintään joukon $\mathbb{R}$ mahtavuus. Siten joukko $\{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ on ylinumeroituva.

(b) (Numeroituva.)Olkoon ensin $a \in \mathbb{Q}$ kiinteä. Tällöin rationaalilukuja $b \in \mathbb{Q}$, joille pätee $a < b$ on numeroituvasti, sillä kuvaus

$$F_a\colon \{]a,b[\subset \mathbb{R} \mid b \in \mathbb{Q}, a < b\} \to \mathbb{N}$$

on injektio. Toisaalta

$$\{]a,b[\subset \mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{Q}, a < b\} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} \{]a,b[\subset \mathbb{R} \mid b \in \mathbb{Q}, a < b\},$$

joka on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

(c) (Numeroituva.) Merkitään kaikilla polynomeilla $P(x)$ polynomien juurten joukkoa

$$A_P = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\}$$

ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ kokonaislukukertoimisten n-asteisten polynomien joukkoa

$$P_n = \{P(x) \mid P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ jollakin } (a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{Z}_n \times \cdots \times \mathbb{Z}_0\}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0 \text{ jollain polynomilla } P\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{P \in P_n} A_P \right). \end{aligned}$$

Polynomilla $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ on korkeintaan n kappaletta juurta, joten kaikilla polynomeilla P joukko A_P on numeroituva. Kiinteällä $n \in \mathbb{N}$ jonoja $(a_n, \dots a_0) \in \mathbb{Z}_n \times \cdots \times \mathbb{Z}_0$ on numeroituvasti, joten indeksijoukko P_n on numeroituva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siten A on numeroituvien joukkojen numeroituva yhdisteenä numeroituva.

(d) (Ylinumeroituva.) Luentomateriaalissa on osoitettu, että luonnollisten lukujen joukon potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ on ylinumeroituva. Väitteen soittamiseksi riittää osoittaa, että on olemassa injektio joukolta $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ joukkoon $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Joukko $\{1,2\}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^N$, joten riittää osoittaa vahvempi väite, että on olemassa injektio

$$f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{1,2\}^{\mathbb{N}}.$$

Olkoon $A \subset \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, toinen seuraavista $n \in A$ tai $n \notin A$. Olkoon $f(A) = (x_n)$, kun (x_n) on sellainen binäärijono, että jos $n \in A$ niin jonon n:llä paikalla on luku 2, ja jos $n \notin A$ niin jonon n:llä paikalla on 1. Tällöin f on selvästi injektio. Tämä todistaa väitteen. (Esimerkiksi $f\{136\} = (2,1,2,1,1,2,1,\dots)$. Selkeyttääksesi ajatustasi voit korvata parin $\{1,2\}$ parilla $\{0,1\}$.)

2.3 Jos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ on jono, määritellään $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k$ ja $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k$.

(a) (1p) Osoita, että jos $A \subset B$, niin $\sup A \leqslant \sup B$ ja $\inf A \geqslant \inf B$,

(b) (1p) Jos $A, B \subset \mathbb{R}$, olkoon $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Osoita, että $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$

(c) (1p) Anna esimerkki joukoista A ja B joille pätee $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$.

(d) (2p) Osoita, että $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$

Ratkaisu.

(a) Oletuksen nojalla $B \subset A$. Tällöin $\inf A$ on joukon B eräs alaraja. Määritelmän nojalla $\inf B$ on joukon suurin alarajaja, joten pätee $\inf A \leq \inf B$. Vastaavasti saadaan $\sup B \leq \sup A$.

(b) Olkoon $x \in A$ ja $y \in B$. Tällöin $x \leq \sup A$ ja $y \leq \sup B$, joten $x + y \leq \sup A + \sup B$. Tämä pätee kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$, joten $\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B$.

(c) Tämä väite ei päde - toivottavasti et menettänyt yöuniasi.

(d) Palautetaan mieliin, että jos (x_n) ja (y_n) ovat jonona joille $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $x_n \leq y_n$, niin $x \leq y$. Palautetaan lisäksi mieliin, että (kaikilla jonoilla ei ole yksikäsitteistä raja-arvoa, mutta) kaikilla kasvavilla ja vähenevillä jonoilla on olemassa yksikäsitteinen raja-arvo. Olkoon siten kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \inf_{k \geqslant n} a_k$$

ja

$$y_n = \sup_{k \geqslant n} a_k.$$

Jos $B \neq \emptyset$, niin on olemassa $x \in B$, jolle pätee $\inf B \leq x \leq \sup B$. Hyvinjärjestyneisyyden nojalla pätee tällöin $\inf B \leq \sup B$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ joukko $\{a_k \mid k \geq n\} \neq \varnothing$, joten kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$x_n = \inf_{k \geqslant n} a_k \leq \sup_{k \geqslant n} a_k = y_n.$$

Kohdasta (a) seuraa, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ päätee

$$x_{n+1} \geq x_n \quad \text{ja} \quad y_n \geq y_{n+1},$$

jolloin jonon (x_n) kasvavuuden ja jonon (y_n) vähenevyyden nojalla on olemassa sellaiset $x, y \in \mathbb{R}$, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Siten pätee

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geqslant n} a_k = \lim_{n \to \infty} x_n = x \leq y = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqslant n} a_k.$$

2.4 Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja olkoon $A_0 = \{f(0)\}$ ja kaikilla $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = fA_n$. Määritellään $A_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

(a) (2p) Osoita, että A_f on numeroituva,

(b) (2p) Osoita, että $f[A_f] \subset A_f$, eli A_f on *suljettu f:n suhteen.*

(c) (1p) Mitä on A_f, jos $f(x) = 2^x$?

Ratkaisu.

(a) Todistetaan induktiolla, että joukko A_n on yksiö kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletuksen nojalla A_0 on yksiö. Tehdään induktio-oletus, että A_k on yksiö. Induktioväite on, että A_{k+1} on tällöin yksiö. Kuvauksen määritelmän nojalla yksiön kuva on yksiö, jolloin induktioletuksesta seuraa, että $A_{k+1} = f[A_k]$ on yksiön kuvana yksiö. Siten joukko

$$A_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

on numeroituvien joukkojen numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

(b) Olkoon $x \in f[A_f]$. Tällöin $f^{-1}\{x\} \in A_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, joten erityisesti on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $f^{-1}\{x\} \cap A_n \neq \varnothing$. Tällöin $x \in f[A_n] = A_{n+1} \subset A_f$. Koska tämä pätee kaikilla $x \in f[A_f]$, pätee $f[A_f] \subset A_f$.

(c) $A_0 = 20 = 1$. Siten A_f on päättymätön lukujono

$$1, 2, 4, \ldots,$$

jossa $x_n = 2^{x_{n-1}}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

2.5 Olkoon a_i, $i \in I$, positiivisia reaalilukuja. Oletetaan, että $\sum_{i \in I} a_i < \infty$. Osoita, että indeksijoukko I on tällöin numeroituva.

Ratkaisu. Olkoon $I_n = \{i \in I : a_i > 1/n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $I_n \subset I$. Tästä seuraa, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{i \in I_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

Kaikilla $i \in I$ pätee $a_i > 0$, joten kaikilla $i \in I$ on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $a_i > \frac{1}{n}$, ja siten erityisesti sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $i \in I_n$. Siten

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Osoitetaan, että joukko I_n on äärellinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$: Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että joukossa I_n on numeroituva ääretön osajoukko $A_n \subset I_n$. Tällöin

$$\infty > \sum_{i \in I} a_i \geq \sum_{i \in I_n} a_i \geq \sum_{i \in A_n} a_i \geq \infty \cdot \frac{1}{n} = \infty,$$

mikä on ristiriita. Siten joukko I_n on äärellinen. Tästä puolestaan seuraa, että indeksijoukko I on äärellisten joukkojen I_n numeroituvana yhdisteenä numeroituva.

2.6 Jos $I =]a, b[$ on avoin väli, $a < b$, olkoon $m(I) = b - a$ välin pituus. Olkoon $\mathcal{F}$ sellainen kokoelma avoimia välejä, että $[0,1] \cup [2,3] \subset \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. Osoita, että $\sum\limits_{A \in \mathcal{F}} m(A) \geqslant 2$.

Ratkaisu. Olkoon $\mathcal{F}$ mielivaltainen joukon $A = [0,1] \cup [2,3]$ Lebesguen peite. Koska A on kompakti (Topologia I) ja Lebesguen peite koostuu avoimista väleistä, on $\mathcal{F}$:llä äärellinen osapeite, eli äärellinen $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$, joka on äärellinen ja $A \subset \bigcup \mathcal{F}^*$. Valitaan joukosta $\mathcal{F}^*$ avoin väli, joka peittää pisteen 0, ja jos sellaisia on useampia, valitaan niistä sellainen, jonka oikea päätepiste on suurin mahdollinen. Merkitään sitä C_1 ja sen päätepisteitä x_1 ja y_1, eli $C_1 =]x_1, y_1[$. Jos $y_1 < 1$, niin seuraavaksi valitaan joukosta $\mathcal{F}^*$ toinen väli, joka peittää pisteen y_1 ja jos sellaisia on useampia, niin valitaan taas sellainen, jonka oikea päätepiste on suurin mahdollinen. Merkitään tätä väliä $C_2 =]x_2, y_2[$. Huomaa, että $x_1 < x_2 < y_1$, koska toisaalta C_2 peittää y_1:n ja toisaalta C_1:llä oli suurin mahdollinen oikea päätepiste niistä, jotka peittää x_1:n, joten C_2 ei peitä x_1:stä. Jatketaan näin kunnes $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ peittää koko välin $[0,1]$. Tämä tapahtuu äärellisen monen askeleen jälkeen, koska $\mathcal{F}^*$ on äärellinen. Tämän jälkeen määritellään $C_{k+1} \in \mathcal{F}^*$ olemaan väli $]x_{k+1}, y_{k+1}[$, joka peittää pisteen 2 ja jolla on suurin mahdollinen oikea päätepiste ja jatketaan kunnes $\{C_{k+1}, \ldots, C_m\}$ peittää koko välin $[2,3]$. Huomaa, että jokaiselle $i < m$, paitsi kun $i = k$, pätee $x_i < x_{i+1} < y_i < y_{i+1}$.

Nyt

$$
\begin{aligned}
\sum_{A\in\mathcal{F}} m_1^*(A) &\geqslant \sum_{A\in\mathcal{F}^*} m_1^*(A) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{k} m_1^*(C_i) + \sum_{j=k+1}^{m} m_1^*(C_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} y_i - x_i + \sum_{j=k+1}^{m} y_j - x_j \\
&= \sum_{i=1}^{k} -x_i + y_i + \sum_{j=k+1}^{m} -x_j + y_j \\
&= -x_1 + y_1 - x_2 + y_2 - \cdots - x_k + y_k - x_{k+1} + y_{k+1} - \cdots - x_m + y_m \\
&= -x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} y_i - x_{i+1} + y_k - x_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{m-1} y_j - x_{j+1} + y_m \\
&> -x_1 + y_k - x_{k+1} + y_m
\end{aligned}
$$

Viimeinen epäyhtälö pätee, koska kaikilla $i < m$, paitsi kun $i = k$ pätee $x_{i+1} < y_i$, kuten yllä on mainittu, joten $\sum_{i=1}^{k-1} y_i - x_{i+1} > 0$ ja $\sum_{j=k+1}^{m-1} y_j - x_{j+1} > 0$. Toisaalta tiedetään, että $x_1 < 0$ ja $y_k > 1$ sekä $x_{k+1} < 2$ ja $y_m > 3$, joten

$$
-x_1 + y_k - x_{k+1} + y_m = (y_k - x_1) + (y_m - x_{k+1}) > 2.
$$

To 24.05.2012

4.1 Osoita, että $m_n^*(A) = 0$, kun

(a) (1p) $A = \varnothing$,

(b) (2p) $A = \{(x, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}\}$ on suora (x-akseli) $\mathbb{R}^n$:ssä ja $n > 1$.

(c) (2p) $A \subset \mathbb{R}^n$ on numeroituva.

Ratkaisu. Koska $m_n^*(A) = \inf\{\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) \mid \mathcal{F}$ on A:n Lebesguen peite$\}$, riittää löytää jokaisella $\varepsilon > 0$ sellainen Lebesguen peite $\mathcal{F}$, että $\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) \leqslant \varepsilon$.

(a) Olkoon $\mathcal{F} = \{]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[\}$. Nyt $\varnothing \subset\subset \bigcup \mathcal{F}$ (koska $\varnothing$ on kaikkien joukkojen osajoukko), joten $\mathcal{F}$ peittää tyhjän joukon ja toisaalta $\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) = \ell(]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[) = \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$. Toisaalta voidaan valita $\mathcal{F} = \varnothing$, jolloin taas $\bigcup \varnothing = \varnothing \supset \varnothing$ ja summa yli tyhjän joukon, $\sum_{I\in\varnothing} \ell(I)$ määritellään (ainakin tällä kurssilla) nollaksi.

(b) Olkoon $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $m \in \mathbb{N}$ määritellään avoin väli

$$I_m = \left]-\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}}, \frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}}\right[.$$

Olkoon sitten jokaisella $m \in \mathbb{N}$,

$$F_{m,\varepsilon} = \left]-2^{m-1}, 2^{m-1}\right[\times \underbrace{I_m \times \cdots \times I_m}_{n-1 \text{ kpl}}.$$

Nyt $\mathcal{F}_\varepsilon = \{F_{m,\varepsilon} \mid m \in \mathbb{N}\}$ on x-akselin Lebesguen peite: se selvästi koostuu n-väleistä ja jos $(x, 0, \ldots, 0)$ on x-akselin piste, niin $x \in F_{k,\varepsilon}$ kaikilla $k > |x|$. Lasketaan seuraavaksi Lebesguen summa:

$$\sum_{I\in\mathcal{F}_\varepsilon} \ell(I) = \sum_{m=1}^{\infty} \ell(F_{m,\varepsilon}). \tag{$*$}$$

Sitä varten lasketaan ensin yksittäisen n-välin mitta:

$$\begin{aligned}
\ell(F_{m,\varepsilon}) &= \ell(\left]-2^{m-1}, 2^{m-1}\right[) \cdot \ell(\left]-\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}}, \frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}}\right[)^{n-1} \\
&= (2^{m-1} - (-2^{m-1})) \cdot \Big(\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}} - (-\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}})\Big)^{n-1} \\
&= 2^m \cdot (\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}} - (-\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m+1}}))^{n-1} \\
&= 2^m \cdot (\frac{\sqrt[n-1]{\varepsilon}}{2^{2m}})^{n-1} \\
&= 2^m \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2m(n-1)}} \\
&< 2^m \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2m}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2^m}
\end{aligned}$$

Joten nyt summa kohdassa $(*)$ voidaan laskea:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(F_{m,\varepsilon}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon$$

(c) Epätyhjä joukko A on numeroituva jos ja vain jos on olemassa surjektio $f\colon \mathbb{N} \to A$. Kurssilla numeroituvuus määriteltiin toisin: että on olemassa injektio $g\colon A \to \mathbb{N}$, joten todistetaan ensin, että injektion g olemassaolosta seuraa surjektion f olemassaolo. Määritellään $f\colon \mathbb{N} \to A$ seuraavasti: $f(k) = g^{-1}(k)$, jos $g^{-1}(k)$ on määritelty ja $f(k) = a$ muuten, missä $a \in A$ on mielivaltainen A:n piste. On helppo nähdä, että näin määritelty f on surjektio. Lisäksi, koska $A \in \mathbb{R}^n$, on $f(k)$ n-ulotteinen vektori jokaisella k, merkitään sen koordinaatteja näin: $f(k) = (f_1(k), f_2(k), \ldots, f_n(k))$.

Kiinnitetään taas $\varepsilon > 0$ ja jokaisella $k \in \mathbb{N}$ määritellään n-väli

$$I_k = \left] f_1(k) - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{k+1}}, f_1(k) + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{m+1}} \right[\times \cdots \times \left] f_n(k) - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{k+1}}, f_n(k) + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{m+1}} \right[.$$

Nyt, koska f on surjektio, jokaisella $b \in A$ löytyy $k \in \mathbb{N}$ siten että $f(k) = b$, joten $b \in I_k$ välin määritelmän mukaan, eli niiden muodostama joukko $\mathcal{F} = \{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ on A:n Lebesguen peite. Lisäksi

$$\begin{aligned}
\ell(I_k) &= ((f_1(k) + \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{k+1}}) - (f_1(k) - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{m+1}})) \cdot \cdots \cdot (f_n(k)\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{k+1}}) - (f_n(k) - \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{m+1}})) \\
&= (\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^k}) \cdot \cdots \cdot (\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^k}) \\
&= (\frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^k})^n \\
&= \frac{\varepsilon}{2^{kn}}) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}),
\end{aligned}$$

joten kuten edellisessä tehtävässä, $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \varepsilon$.

4.2 Osoita, että $m_n^*(A) \leqslant 10$, kun

(a) (1p) $n = 3$ ja $A = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$,

(b) (1p) $n = 5$ ja $A = B(0, \frac{1}{2})$,

(c) (1p) $n = 2$ ja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$,

(d) (2p) $n = 1$ ja $A = [0, 10]$.

Ratkaisu. Kuten edellisessä tehtävässä, vedoten ulkomitan määritelmään, riittää kussakin tapauksessa löytää jokaisella $\varepsilon > 0$ joukolle A Lebesguen peite $\mathcal{F}$ s.e. $\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) < 10 + \varepsilon$, tai mikä ajaa saman asian, sellainen Lebesguen peite $\mathcal{F}$, että $\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) \leqslant 10$.

(a) Olkoon $I = \left]-1\frac{1}{16}, 1\frac{1}{16}\right[$ ja $\mathcal{F} = \{I^3\}$, missä $I^3 = I\times I\times I$. Jos $|x| = 1$, niin $x = (x_1, x_2, x_3)$ joillain x_1, x_2, x_3 joille pätee $|x_i| \leqslant 1$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$. Tästä seuraa tietenkin, että $x_i \in I$ ja $x \in I^3$, joten $S^2 \subset I^3$, eli $\mathcal{F}$ on Lebesguen peite. Riittää siis osoittaa, että $\ell(I^3) < 10$:

$$\ell(I^3) = (1\frac{1}{16} - (-1\frac{1}{16}))^3 = (2\frac{1}{8})^3 < 10.$$

Huomautus: Koska $(2+\varepsilon)^3 = 2 + \varepsilon \cdot C(\varepsilon)$, missä $C(\varepsilon) \to 0$, kun $\varepsilon \to 0$, riittäisi, että toteaisi alussa, että "$I =]-1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ riittävän pienellä ε".

(b) Huom: tämä seuraa myös viikon 2 tehtävän 2.4 ratkaisusta, koska x^2 on jatkuvasti derivoituva. Tässä oleva ratkaisu on erilainen.

Määrittelemme 2-välin F_k jokaisella kokonaisluvulla $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Määritellään ensin $a_0 = 0$ ja positiivisilla kokonaisluvuilla k: $a_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}$, eli $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1+\frac{1}{2}$, $a_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ jne. Huomaa että tämä sarja hajaantuu, joten välit $]a_k, a_{k+1}[$, $k \geqslant 0$ peittävät positiiviselta reaaliakselilta kaiken, paitsi luonnolliset luvut. Olkoon kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$F_k =]a_{k-1}, a_k[\times \left]a_{k-1}^2, a_k^2\right[$$

ja

$$F_{-k} =]-a_k, -a_{k-1}[\times \left]a_{k-1}^2, a_k^2\right[.$$

Välien $]a_{k-1}, a_k[$ ja $]-a_k, -a_{k-1}[$ pituus on $\frac{1}{k}$. Käytetään sitä ja lasketaan 2-välin $]a_{k-1}, a_k[\times \left]a_{k-1}^2, a_k^2\right[$ pituus positiivisella k (symmetrian nojalla lasku menee ihan samalla tavalla negatiivisille k):

$$\begin{aligned}
\ell(]a_{k-1}, a_k[\times]a_{k-1}^2, a_k^2[) &= (a_k - a_{k-1})(a_k^2 - a_{k-1}^2) \\
&= (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1}) \\
&= (a_k - a_{k-1})^2 \underbrace{(a_k + a_{k-1})}_{>1} \\
&< (a_k - a_{k-1})^2 \\
&= \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Analyysi II:n tiedoilla voimme arvioida, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 = 2.$$

Olkoon $\mathcal{F}_1 = \{F_k \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Yllä olevan perusteella $\mathcal{F}_1$ ei peitä koko käyrää $y = x^2$, vaan jättää numeroituvan joukon $\{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ peittämättä. Olkoon $\mathcal{F}_2$ sellainen peite tälle numeroituvalle joukolle, että $\sum_{I \in \mathcal{F}_2} \ell(I) \leqslant 1$ (tällainen on olemassa tehtävän edellisen kohdan nojalla). Nyt $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ on joukon A peite ja $S(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leqslant 2 + 1 = 3 < 10$, missä $S(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \sum_{I \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2} \ell(I)$.

(c) Jokaisella ε olkoon $\mathcal{F}_\varepsilon = \{]-\varepsilon, 10 + \varepsilon[\}$. Nyt $\mathcal{F}_\varepsilon$ on A:n Lebesguen peite ja $\sum_{I \in \mathcal{F}_\varepsilon} \ell(I) = \ell(]-\varepsilon/2, 10 + \varepsilon/2[) = 10 + \varepsilon$.

4.3 Kun $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, merkitään $A + x = \{y + x \in \mathbb{R}^n \mid y \in A\}$ ja jos $t \in \mathbb{R}$, niin $tA = \{ty \in \mathbb{R}^n \mid y \in A\}$. Osoita, että

(a) (2p) $m_n^*(A + x) = m_n^*(A)$,

(b) (3p) $m_n^*(tA) = t^n m_n^*(A)$.

Ratkaisu. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Osoitetaan ensin, että jokaiselle n-välille I pätee $\ell(I) = \ell(I + x)$. Olkoon $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$. Sitten on helppo nähdä, että

$$I + x =]a_1 + x_1, b_1 + x_1[\times]a_n + x_n, b_n + x_n[\,,$$

joten

$$\ell(I+x) = (b_1+x_1-(a_1+x_1))\cdots(b_n+x_n-(a_n+x_n)) = (b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n) = \ell(I).$$

Olkoon $\mathcal{F}$ mikä tahansa joukon A Lebesguen peite. Silloin $\mathcal{F}' = \{I+x \mid I \in \mathcal{F}\}$ on joukon $A+x$ Lebesguen peite. Lisäksi yllä olevan nojalla $S(\mathcal{F}) = S(\mathcal{F}')$, joten $m_n^*(A) \geqslant m_n^*(A+x)$ (koska jokaisella A:n peitteellä löytyy yhtäsuuri $A+x$:n peite, on $A+x$:n peitteiden Lebesgue-summien infimum väistämättä korkeintaan A:n vastaava). (Merkintä: $S(\mathcal{F}) = \sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I)$.) Mutta koska $(A+x)+(-x) = A$, pätee saman argumentin nojalla $m_n^*(A) \leqslant m^*n(A+x)$.

4.4 Osoita, että $m_1^*([0,1]) \cup [2,3] = 2$. Vihje: käytä apuna tehtäviä 2.6 ja 3.6(a). Voit saada tästä tehtävästä pisteitä vain jos olet tehnyt nämä tehtävät, teet ne nyt tai ratkaiset tämän vetoamatta niihin.

Ratkaisu. Olkoon $\mathcal{F}$ mikä tahansa joukon $[0,1]\cup[2,3]$ Lebesguen peite. Silloin se koostuu avoimista väleistä, joten tehtävän 2.6 nojalla, $\sum_{I\in\mathcal{F}} \ell(I) \geqslant 2$ (tehtävässä 2.6 käytettiin notaatiota $m(I) = \ell(I)$). Tästä seuraa, että $m_1^*([0,1]\cup[2,3]) \geqslant 2$. Tehtävästä 3.6(c) seuraa kuitenkin, että jokaisella $\varepsilon > 0$, joukolla $[0,1]\cup[2,3]$ on olemassa Lebesguen peite $\mathcal{F}$ s.e. $S(\mathcal{F}) < 2+\varepsilon$, eli $m_1^*([0,1]\cup[2,3]) \leqslant 2$. Täten $m_1^*([0,1]\cup[2,3]) = 2$.

Katso myös luentomonisteen Lause 1.37 ja sen todistus.

4.5 Olkoon $A \subset B^2(\bar{0},2)$. Osoita, että

(a) (2p) $m_2^*(A) \leqslant m^*([-10,10]\times[-10,10])$

(b) (3p) $m_2^*(A) \leqslant m^*([0,10]\times[-10,10])$

Ratkaisu.

(a) $A \subset B^2(\bar{0},2) \subset [-10,10]\times[-10,10])$, joten tulos seuraa ulkomitan monotonisuudesta (luentomoniste Lause 1.6).

(b) Olkoon $x = (5,0)$. Nyt $B^2(0,2)+x = B^2(x,2) \subset [0,10]\times[-10,10])$ ja toisaalta $A+x \subset B^2(0,2)+x$, joten monotonisuuden nojalla $m_2^*(A+x) \leqslant m^*([0,10]\times[-10,10])$. Toisaalta tehtävän 4.3(a) nojalla $m_2^*(A) = m_2^*(A+x)$.

4.6 Olkoon $A \subset I \times J$ äärellinen. Osoita, että löytyy äärelliset $I' \subset I$ ja $J' \subset J$ siten että $A \subset I' \times J'$.

Ratkaisu.

(a) Olkoon $p_I \colon I \times J \to I$ sellainen kuvaus (projektio), että $p_I(i,j) = i$ kaikilla $(i,j) \in I \times J$, ja $p_J \colon I \times J \to J$, sellainen kuvaus, että $p_I(i,j) = j$ kaikilla $(i,j) \in I \times J$. Tällöin joukon A äärellisyydestä seuraa, että osajoukot $p_I[A] \subset I$ ja $p_J[A] \subset J$ ovat äärellisiä. Edelleen pätee $A \subset p_I[A] \times p_J[A]$, sillä jos $(i,j) \in A$, niin $i \in P_I[A]$ ja $j \in P_J[A]$, jolloin $(i,j) \in p_I[A] \times p_J[A]$. Siten voidaan valita $I' = p_J[A]$ ja $J' = p_J[A]$.