

Vanhan ajan matematiikalle tyypillisiä piirteitä oli matematiikan kehittyminen havainnoista ("luonnonkaavat") ja käytännön tarpeista. Lukumäärän ja jako-osuuden ilmaisemisen tarve on kautta aikojen ollut kaikissa kulttuureissa, mutta matematiikan varsinainen kehitys sai alkunsa tiettävästi Lähi-idässä.

[http://fi.wikipedia.org/wiki/Tiedosto:
Map-World-Middle-East.png](http://fi.wikipedia.org/wiki/Tiedosto:Map-World-Middle-East.png)

In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to an old structure.

– Hermann Hankel

Kuinka muinaiskulttuurien matemaattinen tietotaso on voitu selvittää?

- ▶ Epäsuorat todisteet ja spekulatiot : mm. temppelien pylväiden koristeet ja mosaiikkilaatat, rakennukset, uskonnolliset rituaalit (alttarien mittasuhteet)
- ▶ Säilyneet kirjalliset todisteet (Rhindin ja Moskovan Papyrukset, babylonialaisten savitaulut, Eukleideen Elementa,..)

Osoita, että

- a. tasakylkisen
- b. suorakulmaisen
- c. mielivaltaisen

kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa.

Matematiikan historian suuret kaudet

- ▶ Esikreikkalainen antiikki, erityisesti babylonialaisen matematiikan kukoistuskausi n. 2000 e.a.a.
- ▶ Kreikkalainen ja hellenistinen antiikki n. 500 e.a.a. - 300
- ▶ Intialainen varhaiskeskiaika n. 500-1200
- ▶ Islamin eli arabialaisen matematiikan kulta-aika, n. 800-1200
- ▶ Renesanssi (lähinnä Italiassa) 1500-luvulla
- ▶ Analyysin synty Euroopassa 1600-luvulla
- ▶ Matematiikan yleinen abstrahoituminen ja laajeneminen 1800-luvulla
- ▶ 1900-luku

Egyptissä useita matematiikan kehittämiseen johtaneita syitä/ongelmia:

- ▶ Maanmittaus (geometria!), kastelujärjestelmien kehitys, verotus
- ▶ Niilin tulvat → kuun kierron laskeminen → kalenteri (vuodessa 12 30 päivän kuukautta ja 5 tasauspäivää)
- ▶ Pyramidit, joista suurin osa rakennettu 3000-2000 e.a.a., huikea insinööritaidonnäyte! Keopsin pyramidista voi löytää kultaisen leikkauksen useista suhteista!
- ▶ Hieroglyfinumerot → hieraattiset numerot n. 2000 e.a.a. (Kuva!)

Vanhan ajan matematiikkaa: Egypti

Ranskan armeijan katastrofi (Napoleonin hyökkäys 1798 ja perääntyminen vuotta myöhemmin) oli suuri voitto tieteelle!

- ▶ Napoleonin mukanaan tuomat tiedemiehet vangittiin, mutta vapautettiin ja annettiin palata Ranskaan muistiinpanoineen.
- ▶ Egyptistä löytyneen Rosetta Stonen avulla voitiin ratkaista hieroglyfien mysteeri! Kului tosin 23 vuotta ennen kuin J. F. Champollion julkaisi postuumisti "hieroglyfit-ranska-sanakirjan".

Niilin lahjat maailmalle : Egypti ja geometria!

Rhindin papyrus 1650 e.a.a. ja Moskovan (Golenischevin) papyrus 1850 e.a.a sisältävät aritmeettisiä tehtäviä vastauksineen.

Rhindin papyruksen puhtaaksikirjoittaja oli Ahmes, Henry Rhind taas oli skotlantilainen pankkiiri ja keräilijä, joka papyruksen osti 1858.

"a thorough study of all things, insight into all that exists, knowledge of all obscure secrets"

- ▶ sisältää yhteensä 85 ongelmaa, joista useat koskevat leivän jakamista, oluen panoon tarvittavan viljan määrää..
- ▶ osoittaa, että kertolasku Egyptissä perustui itse asiassa luvun binääriesitykseen!
- ▶ Vain lineaariset, yhden muuttujan yhtälöt tunnettiin, ei korkeamman asteen yhtälöitä.
- ▶ Ympyrän ala laskettu tavalla, jossa π :lle likiarvo $\frac{256}{81}$
- ▶ *False position* -menetelmä levisi myös Eurooppaan ja oli suosittu Fibonaccin Liber Abacista (1202) aina 1500-luvulle, mutta katosi algebrallisen symboliikan kehityttyä.
- ▶ yksikkömurtoluvut!

Moskovan papyruksessa on vain 25 ongelmaa, mutta yksi "mestari-teos": katkaistun neliöpohjaisen pyramidin tilavuus on laskettu oikealla kaavalla:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

(Laskussa pohjan särmän pituus 4, kannen särmän pituus 2 ja korkeus 6, josta tilavuus 56.) Todennäköisesti myös neliöpohjaisen pyramidin

tilavuus tunnettiin.. HUOM! Egyptiläiset eivät kirjoittaneet

matemaattisia kaavoja, vaan "toimintaohjeita" konkreettisin numeroin.

Vanhan ajan matematiikkaa: Babylonia (Mesopotamia)

Babylonian valtakunta sijaitsi Mesopotamiassa ; Mesopotamia = Kaksoisvirran maa = nykyisen Irakin alueen sekä Syyrian itäosan muodostama alue. Tieto babylonialaisesta matematiikasta on verrattain uutta: Otto Neugebauer purki avaimen savitaulujen lukemista varten vuonna 1930. Suurin osa löydettyistä tauluista on Vanhan Babylonian ajalta 1800-1600 e.a.a.

Tyypillisiä babylonialaisen matematiikan piirteitä:

- ▶ Kehittyneempää verratuna egyptiläisiin ; teoreettisempi ilmaisu
- ▶ Nuolenpääkirjoitus, lukujen 1-59 merkinnät hieroglyfinumeroiden tapaan
- ▶ Seksagesimaalijärjestelmä eli 60-kantainen lukujärjestelmä - ajassa edelleen käytössä jako 60:een!
- ▶ "Seksagesimaalipilkku" puuttui ja "nolla" (käytössä vain lukujen välissä) vasta pari sataa vuotta e.a.a.
- ▶ Matematiikka Babyloniassa oli lähinnä sanallista algebraa hallinnon, tähtitieteen ja astrologian tarpeisiin.

Vanhan ajan matematiikkaa: Babylonia (Mesopotamia)

- ▶ Taitavia algoritmisia menetelmiä, mm. neliöjuuren approksimoinnille
- ▶ 2. asteen yhtälöitä osattiin ratkaista – tosin negatiiviset luvut eivät olleet käytössä.
- ▶ Plimton 322 (savitaulu) kertoo, että Pythagoraan lauseeksi myöhemmin nimetty yhtälö tunnettiin jo Babyloniassa!!
- ▶ Tauluissa paljon taulukkoja, joissa laskettu kokonaislukujen neliöitä ja kuutioita, sekä algebrallisia ja geometrisia ongelmia.
- ▶ Piin arveltiin olevan 3 tai $\frac{25}{8}$.

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

Antiikin Kreikka \neq maantieteellinen Kreikka!

Kreikan aikakausi jaetaan *arkaiseen* (700-500 e.a.a.), *klassiseen* (480-330 e.a.a.) ja *hellenistiseen* (330-27 e.a.a.) kauteen.

Näistä hellenistinen aika on mielenkiintoisin matematiikan kehityksen kannalta.

- ▶ Suuri osa nykyisin käytössä olevista termeistä on kreikan kielistä alkuperää
- ▶ Geometria siirtyi uudelle käsitteelliselle tasolle verrattuna Egyptiin ja Babyloniaan
- ▶ Kriittinen asenne: pyrittiin todistamaan myös aiemmin "ilmeisinä" pidettyjä asioita, todistukset ja aksioomat
- ▶ Epäsuorat todistukset tyypillisiä kreikkalaiselle matematiikalle

Thales (624?-547? e.a.a.) todisti seuraavat geometrian teoreemat:

- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret
- b) Ristikulmat ovat yhtä suuret
- c) Kaksi kolmiota, joilla on yhtä suuret kaksi kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu, ovat yhtenevät
- d) Ympyrän jokainen halkaisija jakaa ympyrän kasteen yhtä suureen osaan
- e) Puoliympyrän kaaren sisältämä kulma on suora

Vanhan ajan matematiikkaa: Kreikka

- ▶ Pythagoras (572?-497 e.a.a.) perusti koulukunnan, joka tod.näk. otti ensimmäisenä käyttöön sanan *matematiikka* = "se, mitä tulee tietää"
- ▶ Pythagoraan filosofis-uskonnollisessa koulukunnassa oli mukana myös naisia!
- ▶ "Kaikki maailmassa on (kokonaislukujen) matematiikkaa" ; $\sqrt{2}$:n löytyminen järkytti pythagoralaisia
- ▶ Pythagoralaisilla lukujen luokittelu parillisiin ja parittomiin sekä slkulukuihin ja yhdistettyihin lukuihin

Antiikin 3 suurta ongelmaa:

- ▶ ympyrän neliöiminen (pinta-alan laskeminen)
- ▶ kulman kolmijako
- ▶ kuution kahdentaminen

Ensimmäistä kertaa esitettiin matemaattisia ongelmia, joilla ei tekemistä käytännön tarpeiden kanssa! Myöhemmin on osoitettu, että ongelmat eivät ratkea harpin ja viivaimen avulla konstruoimalla.

Zenonin paradoksit:

- ▶ Dikotomia
- ▶ Akhilleus ja kilpikonna
- ▶ Nuoli
- ▶ Stadion

Miten paradokseista päästiin eroon? **Aristoteles** toi matematiikkaan suureen ja luvun eron! "Ei olemassa aktuaalista ääretöntä, sen sijaan potentiaalinen äärettömyys on."

Platon (429-347 e.a.a.), Sokrateen oppilas ja Aristoteleen opettaja

- ▶ tutustui pythagoralaisiin
- ▶ oli sitä mieltä, että sopivin valtion asukasmäärä on 5040, koska se on lukujen 12, 21 ja 20 tulo ja sen kahdestoista osa on jaollinen 12:lla ja koska se on jaollinen luvuilla 1-10 ja 12. (Kuitenkin 5038 jaollinen 11:llä).

Platonin kappaleet tunnettiin ilmeisesti jo ennen kreikkalaisia - kunnia todistuksesta Platonin aikalaiselle Theaitetokselle.

<http://fi.wikipedia.org/wiki/Platoninkappale>

Eudoksos, matemaatikko ja tähtitieteilijä, oli huomattavin Platonin piirin edustaja ja toi matematiikkaan *tyhjennysmenetelmän* (pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämiseksi) sekä tutki ”yhteismitattomien” lukujen suhteita.

Eukleides (365-300 e.a.a.) sai ilmeisesti koulutuksensa Platonin Akademiassa. Eukleideen Alkeet (Elementa, Stoikheia) n.300 e.a.a.

- ▶ on varhaisin säilynyt "matematiikan oppikirja"
- ▶ kokoaa yhteen kaiken siihen astisen tiedon matematiikasta (geometriasta)
- ▶ oli käytössä oppikirjana yleisesti 1800-luvulle saakka myös Suomessa
- ▶ sisältää todistuksen sille, että kahden ympyrän alan suhde on sama kuin niiden halkaisijoiden neliöiden suhde

Termit postulaatti (lat. "vaaditaan") ja aksiooma ("yleisesti hyväksytty") juontuvat Alkeista.

Arkhimedes (287-212 e.a.a.) - Antiikin lahjakkain(?) matemaatikko ja luonnontieteilijä

- ▶ sai koulutuksensa ilmeisesti Aleksandriassa
- ▶ "harrastuksena" aseiden kehittäminen
- ▶ pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen tyhjennysmenetelmällä (integraalilaskennan alkuaskeleet)
- ▶ esitti merkintätavan erittäin suurille luvuille (lukujen kertolasku = eksponenttien yhteenlasku)

Apolloniuksen (260-170 e.a.a.) kartioleikkaukset : fysikaalinen merkitys vasta Keplerin planeettateorian ja Newtonin mekaniikan myötä lähes 2000 v myöhemmin! Nimitykset *paraabeli* ("asettaa rinnalle"), *ellipsi* ("jää vajaaksi") ja *hyperbeli* ("ylittyä") peräisin Apolloniukselta.

Diofantoksen yhtälöt = polynomiyhtälöt tai yhtälöryhmät, joihin ratkaisuna kokonais- tai rationaaliluku

Trigonometriaa geometrian keinoin Antiikissa kehittivät tähtitieteilijät **Hipparkhos ja Ptolemaios**. Nykyisiä trigonometrisiä yhtälöitä ei vielä tunnettu.

Luentotehtävä, Diofantoksen ikä

Diofantos eli $\frac{1}{6}$:n elämästään lapsena, $\frac{1}{12}$:n nuorukaisena ja sitten vielä $\frac{1}{7}$:n poikamiehenä. Viisi vuotta sen jälkeen, kun Diofantos oli mennyt naimisiin, hän sai pojan, joka kuoli neljä vuotta isäänsä ennen ja saavutti puolet isänsä ikävuosista.

Mikä mahtoi olla Diofantoksen ikä?

Hellenistisen kulttuurin romahduksen myötä romahti myös matematiikka: Yhtenä syynä pidetään haluttomuutta muodostaa

matemaattisia yleiskäsitteitä vapaasti, reaali maailman vastineista riippumatta

(vrt. nykyajan matematiikalle ominainen formalismi).

Vanha käsitys: "Totuudet", ideaali maailma vs. reaali maailma

vs.

Uusi käsitys: Sovitut määritelmät, perusobjektit

"Hypatian (400-luvulla) mukana kuoli viimeinen sivistys Antiikin Kreikasta."

Matematiikkaa keskiajalla (n. 500-1400)

Kreikan kulttuurin romahduksen myötä koko Länsi-Euroopan matematiikan kehitys jäi pimentoon vuosisatojen ajaksi. Keskiajalla matematiikan kehityksen painopiste siirtyi Aasiaan (Intia, Kiina). Vasta keskiajan loppuvaiheilla, 1100-1200-luvuilla matematiikan harrastus elpyi Euroopassa.

- ▶ 10-järjestelmä, "*arabialaiset*" numerot edelleen käytössä!
- ▶ NOLLA omana lukunaan (**Aryabhata** 400-luvulla) , 'nothingness = eternity'
- ▶ **Brahmagupta** esitti nollan ominaisuudet 600-luvulla:
 $1 + 0 = 1$, $1 - 0 = 1$, $1 \times 0 = 0$
- ▶ Entä $\frac{1}{0} = ?$ $\frac{1}{0} = \infty!$ (**Bhaskara II Acharya** 1100-luvulla)

- ▶ Sinifunktio!
- ▶ "Velat" = negatiiviset luvut
- ▶ "Numeroilla oma elämä" , Brahmagupta: $x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$
(Lännessä vasta Fermat 1600-luvulla..)

- ▶ π :lle likiarvo 3,1416 (Aryabhata) \rightarrow maan ympärysmitta
- ▶ "Auringon etäisyys 400 kertainen Kuun etäisyyteen verrattuna"
- ▶ Äärettömät summat, sarjat vs. trigonometria
- ▶ π :n sarjaesitys (**Madhava**)
- ▶ Yksisanainen todistus "Katso!" Pythagoraan lauseelle (Bhaskara II)

Ratkaise seuraava tehtävä Bhaskara II Acharyan kirjasta "Vija-Ganita" (1100-luvulta):

Joku sanoo "Anna minulle 100, niin minulla on kaksi kertaa niin monta kuin sinulla, ystäväni!" Ystävä vastaa: "Jos sinä annat minulle 10, tulen minä kuusi kertaa niin rikkaaksi kuin sinä." Montako oli kummallakin?

Luentotehtävä, ratkaisu

Ratkaisu:

Merkitään x :llä sitä mitä "ystävälle" jäisi, jos hän antaisi pyydytyt 100. Tällöin ensin puhuneella olisi $2x$. Aluksi ystävällä on siis ollut $x + 100$ ja ensin puhuneella $2x - 100$. Toisaalta, "ystävän" puheiden perusteella pätee yhtälö

$$(x + 100) + 10 = 6((2x - 100) - 10).$$

Ratkaistaan x ylläolevasta yhtälöstä

$$\begin{aligned}(x + 100) + 10 &= 6((2x - 100) - 10) \\ \iff x + 110 &= 6(2x - 110) \\ \iff x + 110 &= 12x - 660 \\ \iff 770 &= 11x \\ \iff x &= 70.\end{aligned}$$

Alunperin "ystävällä" oli siis $70 + 100 = 170$ ja ensin puhuneella $2 \cdot 70 - 100 = 40$. (Tarkista, että ratkaisu toimii!)

Islamin kulttuurin suurimpana ansiona pidetään antiikin perinnön tallettamista ja toisaalta intialaisten aritmetiikan osaamista ja välittämistä.

- ▶ "Oppiminen Jumalan vaatimus"
- ▶ rukousajat, geometrinen symmetria koristuksissa
- ▶ Merkittävin arabimatemaatikko **Muhammed Al-Khwarizmi** jatkoi intialaisten (huolimattoman käynnöksen vuoksi *arabialaisina* tunnettujen) numeroiden 1 – 9, 0 käyttöä ja vahvisti näin niiden tärkeyttä

Keskiaika: Matematiikka islamilaisten käsissä (n. 600-800)

- ▶ algebran laskutoimituksiin systemaattiset tavat; kaavat mille tahansa numeroille (mm. 2. asteen yhtälö)
- ▶ arabitähittäitieteilijät tunnistivat tangenttifunktion ja jossain määrin myös kaikkia muita trigonometrisiä funktioita
- ▶ Muita arabimatemaatikoita olivat mm. **Omar Khaijam** (tutki 3.asteen yhtälöitä) ja **Al-Kashi** (π :lle 16-desimaalinen arvo)

Mitä Kiinan muuri kertoo insinööritaidoista?!

- ▶ "10-järjestelmä": numerot 1-9, paikkajärjestelmä 1000 vuotta ennen länttä!
- ▶ ei nollaa, tyhjä paikka lukujen välissä
- ▶ numeroilla kosminen tarkoitus (odd=male, even=female, 8=onni)
- ▶ Sudoku-tyyppisiä pelejä harrastettiin paljon
- ▶ astronomit arvostettuja matemaatikkoja

Verotuksen, palkkojen laskun, painojen ja mittojen myötä matematiikka kehittyi..

- ▶ yhtälöryhmät, neliöjuuret, 2. asteen yhtälöt, kuutiojuuret
- ▶ tilavuuksien approksimointi
- ▶ negatiiviset ja positiiviset luvut tunnettiin varhain
- ▶ π :lle likiarvoja..

- ▶ *Kiinalainen jäännöslause*: on olemassa luku, jota annetuilla luvuilla jaettaessa saadaan annetut jakojäännökset.
- ▶ **Jang Hui**: kaava $n:n$ ensimmäisen neliöluvun summalle ja binomikerroinkaava (eli Pascalin kolmio)
- ▶ Yhteydet muihin kulttuureihin olivat niukat

Varhaiskeskiajalla Euroopan matematiikan taso oli alhainen. Matematiikan osaaminen elpyi keskiajan lopulla ja 1200-luvulla Länsi-Euroopan matemaattinen taso kohosi arabialaiselle tasolle. Kreikan (kreikan kielisiä) matemaattisia tekstejä alettiin kääntää myös latinaksi.

- ▶ Ensimmäiset yliopistot perustettiin, matematiikalla ei vielä omaa "oppituolia"
- ▶ Matemaattis-filosofisia pohdintoja
- ▶ Ääretön: 1) lukumäärä, 2) mielivaltaisen pieni/suuri
- ▶ Rutto 1300-luvulla!
- ▶ Ranskalainen **Nicole Oresme** päätteli, että harmonien sarja hajaantuu. Lisäksi hän toi matematiikkaan potenssin x^q , $q \in \mathbb{Q}$.
- ▶ Uusia lähestymistapoja tieteellisessä ajattelutavassa, käsitteellinen yleistäminen

Kuinka monta kaniiniparia syntyy vuodessa, jos vuoden alussa on yksi pari ja jokainen pari synnyttää joka kuukausi uuden parin, joka alkaa synnyttää kahden kuukauden kuluttua? (Liber abbac vuodelta 1202, kirj. Fibonacci eli Leonardo Pisalainen)

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = a_2 = 1.$$

- ▶ Fibonaccin luvut esiintyvät laajalti luonnossa! Kukat, ananas, etanat, ...
`http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html`
- ▶ Fibonacci käytti arabialaisia, ei roomalaisia numeroita!

Osoita induktiolla, että Fibonaccin luvuille $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ on voimassa

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1 \quad \text{ja} \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n .

Matematiikka Euroopassa 1400-1600-luvuilla

Eurooppalaiset olivat seuraavana vuorossa matematiikan hallitsijoina! Algebra kehittyi huimasti ja kirjapainotaito mahdollisti matemaattisten tekstien laajan levittämisen. Löytöretkien vuosisata vaati matematiikan kehittymistä merenkulun ja astronomian tarpeisiin.

Matematiikka Euroopassa 1400-1600-luvuilla

- ▶ Renessanssin aika erityisesti Italiassa toi tekniikan takaisin matematiikkaan ja matematiikan (geometrian) yhteyden kuvataiteisiin.
- ▶ Mm. **Piero della Francesca** paneutui matematiikan ja maalaustaiteen yhteyksiin
- ▶ Perspektiiviä pakopisteineen tutkittiin ahkerasti muidenkin taiteilija/matemaatikkojen toimesta: Leon Battista Alberti varhaisin, muita mm. Leonardo Da Vinci, Albrecht Dürer
- ▶ "Harmonisten lukujen ja universumin yhteys"
- ▶ plus-, miinus- ja yhtäsuuruusmerkit käyttöön nykymuodossaan
- ▶ 3. ja 4. asteen yhtälöiden algeralliset ratkaisukaavat julkaistiin italialaisen **Girolamo Cardanon** teoksessa Ars Magna
- ▶ Imaginaariluvut esillä ensimmäistä kertaa (**Raffael Bombelli** v.1572)

Ranskassa toimi paljon matemaatikkoja:

- ▶ **Francois Viète**, juristi ja hallintomies, puolsi desimaalilukuja, käytti kirjaimia tunnettujen ja tuntemattomien suureiden merkinnässä
- ▶ Filosofin ja matemaatikon **Descartes** kehitti algebraa ja (analyttistä) geometriaa
- ▶ Pariisilainen **Mavin Mersenne** tutki alkulukuja. Mersennen alkuluvut ovat muotoa $2^p - 1$, missä p alkuluku, olevia alkulukuja.
- ▶ Modernin lukuteorian – analyttisen geometrian ohella – taas oli **Pierre de Fermat**'n alaa

1500-1600 -luvut Euroopassa

1600-luku oli käännekohta matematiikan alalla. Koko Länsi-Eurooppa oli vahvasti mukana matematiikan kehityksessä. Britanniassa, Saksassa, Sveitsissä ja Itävallassa tapahtui mm. seuraavaa:

- ▶ Logaritmit keksittiin (**John Napier** ja **Henry Briggs**)
- ▶ Differentiaali- ja integraalilaskenta (calculus) sai alkunsa! **Newton vs. Leibniz!**
- ▶ Planeettaliikettä koskevasta laistaan tunnettu **Johannes Kepler** käytti infinitesimaalisia pinta-alan ja tilavuuden määritysmenetelmiä menestyksekkäästi
- ▶ Äärettömän pieni, äärettömän suuri, äärettömyyden "eri kertaluvut" (**Galileo Galilei**)
- ▶ Ensimmäistä kertaa infinitesimalisuus tangentin määrittämisessä, erotusosamäärän raja-arvon idea tangentin yhteydessä

Tästä alkoi matematiikan valtava kehitys. Useimmat matemaatikot olivat myös fyysikoita ja tähtitieteilijöitä!

- ▶ **Bernoullin veljekset** levittivät Leibnizin matematiikkaa
- ▶ Eulerin, jonka käsissä myös analyysi kehittyi, Königsbergin siltaongelma oli sysäys *topologialle*
- ▶ Symbolit i , π vakiintuivat käyttöön
- ▶ alkuluvut, optiikka, musiikki..
- ▶ **Lagrangen** sarjakehitelmät, äärettömät summat ja termi "derivaatta" tulivat käyttöön

Ranskan vallankumouksen aika oli myös aktiivista matematiikan aikaa.

- ▶ Euklidinen geometria ainoa tunnettu aina **Bolyain** (s.1802) julkaisuun saakka. Hyperbolinen geometria avasi tien myös muille epäeuklidisille geometrioille.
- ▶ Logiikan ja joukko-opin synty (**Cantor**)
- ▶ Todennäköisyyslaskenta sai alkunsa
- ▶ Analyysi tuli täsmälliseksi
- ▶ Irrationaaliluvuille tarkka määritelmä

Muita henkilöitä: **Cauchy, Riemann, Fourier, Laplace, Gauss**

1900-luvulla on elänyt suurin osa kaikista matemaatikoista. Ennennäkemätön vauhti edistymisessä kaikilla matematiikan aloilla on johtanut myös alojen eriytymiseen. 2. maailmansodan aikana useat eurooppalaiset matemaatikot pakenivat natsseja USA:an, joka nykypäivänä on (myös) matematiikan suurvalta!

- ▶ **David Hilbert** esitti Pariisin konferenssissa vuonna 1900 23 matemaattista, vielä ratkaisematonta ongelmaa.
- ▶ **Cantor** ymmärsi äärettömän "sielun" ja osoitti, että *numeroituvan äärettömyyden* lisäksi on muita äärettömyyksiä
- ▶ Topologia jatkoi kehitystään
- ▶ Joukko-oppi, topologia, mittateoria (mm. **Emile Borel**, **Henri Lebesgue**) → funktionaalianalyysi (mm. **Stefan Banach**)
- ▶ "Nicolas Bourbaki" pyrki yhtenäistämään matematiikkaa. Mm. termit bijektio, surjektio ja symbolit \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \emptyset ovat *bourbakismeja*