1 Epäeuklidinen geometria

1.1 Varhaisesta geometriasta

Geometria on lukuteorian ohella yksi varhaisimmista matematiikan aloista. Alun perin se syntyi maanmittauksen ja rakennustaidon tarpeisiin varhaisissa kulttuureissa, kuten Egyptissä, Babyloniassa, Kiinassa ja Intiassa (alttarien rakentaminen). Säilyneistä kirjoituksista nähdään, että varhaiset geometrikot kuitenkin käsittelevät geometriaa abstraktina tieteenä, ja he tuntevat monia kaavoja, jotka on ilmeisesti keksitty kokeilemalla ja intuition avulla. Osa kaavoista on tarkkoja, toiset ovat myöhemmin osoittautuneet likimääräisiksi.

1.2 Kreikkalaisesta geometriasta

Kreikassa geometria nousi pian erääksi tärkeimmistä abstraktin filosofian aloista. Kreikkalaiselle geometrialle oli ominaista kuvioiden ominaisuuksien johdonmukainen päättely annetuista oletuksista, välttäen havaintoihin perustuvia päätelmiä. Jo muinaiset filosofit, kuten Thales (635–543 eKr.) ja Pythagoras (570–495 eKr.) johtivat geometrisia kaavoja päättelemällä ja pitivät geometriaa ”puhtaana” tieteenä. Klassisen kauden ehkä tärkein filosofi Platon (427–347 eKr.) puhui paljon matematiikan puolesta, vaikkei itse ollut erityisen taidokas matemaatikko. Platonin Akatemian sisäänkäynnin yllä luki ”Älköön kukaan geometriaa tuntematon astuko sisään”. Noihin aikoihin matematiikka oli kreikkalaisille lähes sama asia kuin geometria: toisaalta suuri osa matematiikan tutkimuksesta keskittyi geometriaan (toinen tärkeä alue oli lukuteoria), ja toisaalta algebrallisen merkintätavan puuttuessa luvuista oli tapana puhua janoina, lukujen yhteenlaskemisesta janojen yhteenliittämisenä jne.

Kaikkien aikojen kuuluisin geometrikko oli kuitenkin Aleksandriassa hellenistisellä kaudella vaikuttanut Eukleides (n. 325–265 eKr.). Hän kokosi siihenastisen kreikkalaisen geometrian ja lukuteorian tuntemuksen teokseensa Alkeet (kreikaksi *Stoikheia*, latinaksi *Elementa*). Teoksen tärkein anti oli geometrian aksiomatisointi: lähtien viidestä aksioomasta sekä viidestä perusolettamuksesta Eukleides johti (tai yritti johtaa) kaikki tunnetut geometrian tulokset. Eukleides käytti erityisesti epäsuoraa todistusmenetelmää.

1.3 Eukleideen aksioomat

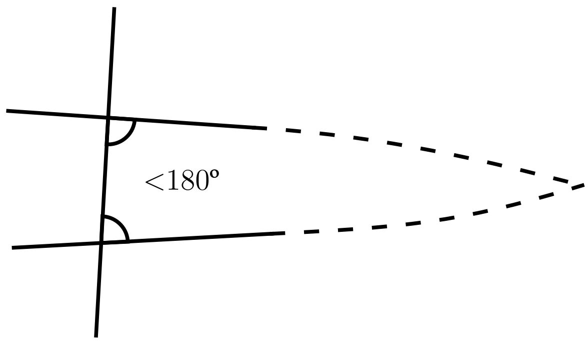
Alla ovat Eukleideen Alkeiden alussa mainittavat viisi aksioomaa, joita historiallisesti nimitetään myös ”postulaateiksi”.

1. Oletettakoon, että jokaisesta pisteestä jokaiseen pisteeseen voi vetää suoran viivan.
2. Ja äärellistä suoraa voi jatkaa jatkuvasti suoraan.
3. Ja jokaista keskipistettä ja etäisyyttä kohti voi piirtää ympyrän.
4. Ja kaikki suorat kulmat ovat keskenään samat.

5. Ja jos suora, joka lankeaa kahden suoran päälle, tekee sisäpuolella ja samalla puolella itseään sijaitsevat kulmat pienemmiksi kuin kaksi suoraa kulmaa, nuo kaksi suoraa kohtaavat niitä rajattomasti jatkettaessa sillä puolella, jolla ovat ne kahta suoraa kulmaa pienemmät kulmat.

Vaikka 1. aksiooman suoria voisi periaatteessa olla useita, Eukleides myöhemmin itse käsittelee aksioomaa kuin suoran oletettaisiin olevan yksikäsitteinen, ja tämä on myös jälkipolvien tulkinta. Samaten 2. aksiooman suoraa ajatellaan voitavan jatkaa vain yhdellä tavalla, ja 3. aksiooman ympyriä on samoin vain yksi.

Viidettä aksioomaa kutsutaan paralleeliaksioomaksi. Eukleides määrittelee suorien olevan yhdensuuntaiset eli paralleelit, jos ne eivät leikkaa toisiaan. Alla olevasta kuvasta näkyy paralleeliaksiooman sisältö.



Koska paralleeliaksiooma on muihin aksioomiin nähden huomattavasti monimutkaisempi, sitä on pidetty Eukleideen teorian puutteena, jopa häpeäpilkkuna. Kautta historian matemaatikot ovat yrittäneet johtaa sen muista neljästä aksioomasta tai korvata sen jollakin yksinkertaisemmalla versiolla. Nämä pyrkimykset jäivät kuitenkin tuloksettomiksi.

1.4 Paralleeliaksiooman todistaminen

Paralleeliaksioomaa yrittivät todistaa muun muassa seuraavat matemaatikot: Ptolemaios (90–168), Proclus (412–487), al-Ṭūsī (1201–1074), John Wallis (1616–1703), Girolamo Saccheri (1667–1733), Johann Lambert (1728–1777), Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

Kaikki paralleeliaksiooman ”todistaneet” sortuivat olettamaan jotain ylimääräistä, tyypillisesti sellaista, mikä on yhtäpitävää kyseisen aksiooman kanssa. Tällaisia väittämiä ovat muun muassa seuraavat:

1. Suora, joka leikkaa toista kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta, leikkaa myös toista.
2. On olemassa kaksi suoraa, jotka ovat kaikkialla yhtä etäällä toisistaan.
3. Kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa.

4. Jokaista kolmiota kohti on olemassa kolmio, joka on sen kanssa yhdenmuotoinen muttei yhtenevä.
5. Millä tahansa kahdella yhdensuuntaisella suoralla on yhteinen normaali.
6. Minkä tahansa kolmen pisteen kautta voidaan piirtää ympyrä, jos ne eivät sijaitse samalla suoralla.
7. Kaksi suoraa, jotka ovat yhdensuuntaisia kolmannen kanssa, ovat yhdensuuntaiset keskenään.
8. Suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi suoran kanssa yhdensuuntainen suora (Playfairin aksiooma).

Italialainen jesuiittapappi Girolamo Saccheri yritti todistaa paralleeliaksiooman vastaoletuksen kautta teoksessaan *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733). Hän päätyi tietämättään kehittämään hyperbolista geometriaa samalla tavoin kuin myöhemmin Gauss, Bolyai ja Lobatševski.

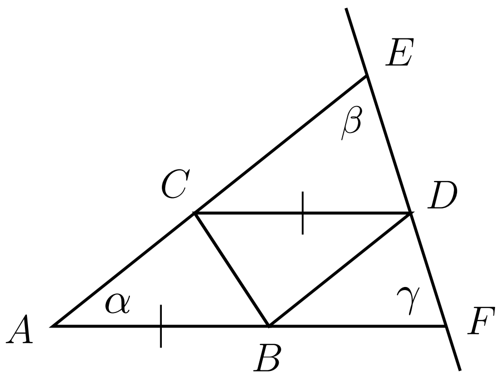
Saccheri yritti todistaa paralleeliaksiooman epäsuorasti, olettamalla että paralleeliaksiooma ei päde. Hän lähti liikkeelle kuvan mukaisesta suorakaiteesta, jossa on kaksi yhtä pitkää sivua kohtisuorassa annettua suoraa vastaan. Suorakulmion yläkulmia ei tunneta, mutta yhtenevien kolmioiden avulla on helppo nähdä, että ne ovat yhtä suuret.

On kolme vaihtoehtoa: kulma α on a) 90 astetta b) enemmän kuin 90 astetta tai c) vähemmän kuin 90 astetta. Vaihtoehto a) johtaa paralleeliaksioomaan, joten Saccheri hylkäsi sen. Vaihtoehto b) taas johtaa muutaman mutkan kautta ristiriitaan muiden aksioomien kanssa. Ainoastaan vaihtoehtoa c) Saccheri ei pystynyt kumoamaan. Hän johti siitä kaikenlaisia järjettömältä vaikuttavia tuloksia, mutta päätyi lopulta hylkäämään myös tämän vaihtoehdon vetoamalla joihinkin intuitiivisiin periaatteisiin. Aika ei ollut vielä kypsä epäeuklidisen geometrian syntymiselle.

Ranskalaisen Adrien-Marie Legendren kirja *Eléments de Géométrie* (1794) palautti ranskalaiseen geometrian opetukseen täsmällisen todistamisen. Kirjasta tuli hyvin suosittu mm. Ranskassa ja Yhdysvalloissa. Kirjan liitteissä esiintyy paralleeliaksiooman todistusyrityksiä.

Legendre käytti todistuksissaan mielellään erilaisia rajattoman kasvun tai pienenemisen tuottamia ristiriitoja. Hän yritti Saccherin tavoin (mutta hänestä tietämättä) epäsuoraa todistusta. Legendren vastaoletus oli, että kaikkien kolmioiden kulmien summa ei olisi 180 astetta. Hän pystyi helposti osoittamaan, että minkään kolmion summa ei voi olla enempää kuin 180 astetta, joten jonkin kolmion kulmien summan olisi oltava vähemmän.

Kuvassa kolmion ABC kolmion kulmien summa on esimerkiksi $180° - a$. Legendre konstruoi toisen kolmion BCD, joka on edellisen kanssa yhtenevä niin, että $AB = BC$. Pisteen D kautta hän piirsi suoran ja täydensi lopulta kuvion jatkamalla janoja AB ja AC niin, että ne kohtaavat kyseisen suoran pisteissä E ja F.



Nyt kolmioiden ABC ja BCD kulmien summat ovat molemmat $180° - a$, ja kolmioiden CED ja BFD kulmien summat molemmat korkeintaan $180°$. Yhteensä kaikkien kolmioiden kulmien summa on siis korkeintaan $4 \cdot 180° - 2a$. Toisaalta pisteissä B, C ja D on oikokulmat, joten summa on yhteensä $3 \cdot 180° + \alpha + \beta + \gamma$. Täten nähdään, että

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 180° - 2a.$$

Jatkamalla konstruktiota saadaan kolmioita, joiden kulmien summa on korkeintaan $180° - 2^n a$. Lopulta päädytään tilanteeseen, jossa $180° - 2^n a < 0$. Tällainen kolmio on mahdoton, joten vastaoletus on väärä ja paralleeliaksiooma tosi.

Legendren virhe oli siinä, että hän oletti janoja AB ja AC voitavan aina jatkaa niin, että ne kohtaavat lopulta D:n kautta kulkevan suoran. Tähän kuitenkin vaaditaan paralleeliaksioomaa.

Augustus de Morgan kertoo Lagrangesta teoksessaan *Budget of Paradoxes*: Lagrange oli esittelemässä yhdensuuntaisia suoria koskevaa artikkeliaan Ranskan Akatemialle, mutta keskeytti luennon sanoihin ”Minun täytyy miettiä tätä vielä”, työnsi paperin taskuunsa eikä enää koskaan puhunut aiheesta.

1.5 Epäeuklidiset geometriat

Unkarilaisen János Bolyain (1802–1860) matemaatikkoisä Farkas (Wolfgang) Bolyai tunsi aikakauden tunnetuimman matematikon, saksalaisen Carl Friedrich Gaussin (1777–1855), ja yritti kirjeitse saada poikaansa tämän oppilaaksi. Gauss ei vastannut kirjeeseen. János oli poikkeuksellisen lahjakas: sairastuttuaan hänen isänsä lähetti pojan jo 13-vuotiaana luennoimaan sijaisenaan.

Isä yritti varoittaa Jánosta tutkimasta liikaa paralleeliaksioomaa: ”Se ei johda tulokseen; sen sijaan se tulee myrkyttämään koko elämäsi.” Yritettyään aikansa Bolyai ryhtyi käsittelemään aksiooman negaatiota omana aksioomanaan ja johti siitä uuden (hyperbolisen) geometrian. Isä liitti pojan todistukset liitteeksi omaan pedagogiseen teokseensa nimellä *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* (1832).

Gauss arvosti Bolyaita: ”Pidän tätä nuorta geometrikkoa Bolyaita ensimmäisen luokan nerona” (kirjeessä entiselle oppilaalleen Gehringille), mutta ei julkisesti puolustanut tämän tuloksia. Hän oli kuulemma itse pohtinut samoja asioita jo 30 vuoden ajan ja todistanut kaikki Bolyain tulokset ennen häntä. Bolyai masentui ja vetäytyi matematiikasta, ja *Appendix* unohtui 35 vuodeksi.

Gauss näyttää kehittäneen epäeuklidisen geometriansa viimeistään 1824, lähtien paralleeliaksiooman negaatiosta kuten Bolyai. Hän aikoi ilmeisesti kirjoittaa tuloksensa ylös, mutta ei koskaan julkaissut niitä. Suurimpana syynä lienee ollut pelko joutua yleisön hampaisiin, erityisesti Immanuel Kantin (1724–1804) kannattajien.

Kantin mielestä ihmismieli sisältää jo syntyessään ”intuitioita”, joita ei voi ajattelussa sivuuttaa vaan jotka muokkaavat sitä. Vain euklidinen geometria on mahdollinen, koska se on mielessä jo valmiiksi eikä siksi ole mahdollista edes ajatella mitään muunlaista geometriaa.

Gauss mittasi sellaisen kolmion kulmat, jonka sivut olivat noin 65 km, ja sai tuloksen joka oli korkeintaan 2 kaarisekunnin päässä 180 asteesta.

Venäläinen Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1793–1856) opiskeli, opetti ja hallinnoi Euroopan itäisimmässä, Kazanin yliopistossa. Venäjän yliopistot olivat eristyneitä muusta maailmasta, koska hallitus yritti Napoleonin hyökkäyksen jälkeen luoda kansallisylpeyttä ja muun muassa kielsi opetuksen muilla kuin venäjän kielellä sekä kielsi venäläisiä opiskelemasta Saksassa.

Lobatševski esitteli geometriansa ensi kerran 1826, ja se julkaistiin Kazanin yliopiston lehdessä artikkelissa ”Geometrian perusteista”. Pietarin tiedeakatemia kuitenkin hylkäsi artikkelin. Lobatševski yritti monesti uudelleen saada näkyvyyttä teorioilleen, mutta ilman menestystä.

Lobatševski lähestyi ongelmaa samasta suunnasta kuin Gauss ja Bolyai. Hän vaihtoi Playfairin aksiooman tilalle oman aksioomansa: annetun suoran ulkopuolisen pisteen kautta voidaan piirtää *useampi kuin yksi* tuon suoran kanssa yhdensuuntainen suora. Tuloksena muun muassa jokaisen kolmion kulmien summaksi tulee vähemmän kuin 180 astetta, ja itse asiassa sitä vähemmän, mitä suurempi kolmion pinta-ala on.

Gauss luki Lobatševskin tuloksista saksankielisestä lyhennelmästä (julkaistu 1840), ja oli niin vaikuttunut, että opiskeli vielä vanhoilla päivillään venäjää voidakseen tutustua tämän muuhun tuotantoon. Hän ei kuitenkaan edelleenkään antanut julkista tukeaan Lobatševskin tuloksille.

1.6 Täsmällisyyden vaatimus

Saksalainen Bernhard Riemann (1826–1866) oli Gaussin oppilas. Hän pääsi Göttingenissä *privatdozentin* virkaan, ja Gauss pyysi häntä pitämään koeluentonsa aiheesta ”geometrian alkeet” (ainoa kolmesta aiheesta, jota Riemann ei ollut erityisesti valmistellut). Luento pidettiin koko filosofiselle tiedekunnalle, joten se ei sisältänyt teknisiä yksityiskohtia, mutta siitä tuli legendaarinen. Riemann muun muassa esitti, että avaruus voisi olla äärellinen mutta rajaton siinä mielessä kuin pallon pinta on äärellisen kokoinen mutta reunaton. Voisi käydä niin (kuten pallon pinnalla käy), että mitkä tahansa suorat leikkaavat jossain, eikä näin ollen yhdensuuntaisia suoria olisi lainkaan olemassa. Tämä sotii Eukleideen aksioomia 1 ja 2 (ja tietysti 5) vastaan, ja tuottaa vielä uudenlaisen epäeuklidisen geometrian.

1800-luvulla syntyi matematiikkaan erityinen täsmällisyyden vaatimus, ja esimerkiksi Weierstrass kehitti analyysiin tutun epsilon–delta-perustelun aiemmin käytetyn epämääräisen ”rajattoman lähestymisen” sijaan. Myös reaalilukujen ja varsinkin irrationaalilukujen luonnetta pohdittiin, ja ne pyrittiin määrittelemään täsmällisesti. Samaten geometrialle pyrittiin löytämään täsmälliset perusteet.

Tähän mennessä oli kehitetty kolme geometrian teoriaa: Eukleideen, Bolyain–Lobatševskin sekä Riemannin, mutta mitään näistä ei ollut todistettu ristiriidattomaksi. Italialainen Eugenio Beltrami (1835–1900) osoitti vuonna 1868, että osa lobatševskilaista tasoa voidaan esittää torvea muistuttavan ns. ”pseudopallon” pinnalla (hän esitti muitakin malleja). Suorat tulkitaan pinnan geodeeseiksi. Näin ollen jokainen kaksiulotteisen hyperbolisen geometrian tulos voidaan muuttaa pseudopallon pinnalla tavallisen kolmiulotteisen euklidisen geometrian tulokseksi, joten jos euklidinen geometria on ristiriidaton, myös hyperbolinen on.

Saksalainen Felix Klein (1849–1925) esitti vuosina 1871 ja 1873 täydelliset mallit sekä Riemannin että Bolyain–Lobatševskin geometrioille. Hän huomautti, että Riemannin geometrioita on kaksi: toisessa kaikki suorat kohtaavat kahdessa pisteessä, toisessa yhdessä. Ensimmäinen voidaan esittää pallon pinnalla, jossa suorat vastaavat pallon isoympyröitä, jälkimmäinen projektiivisella tasolla (puolipallo, jonka reunan vastakkaiset pisteet samastetaan).

Saksalainen David Hilbert (1862–1943) julkaisi uuden geometrian aksiomatisoinnin teoksessaan *Grundlagen der Geometrie* (1899). Eukleideen aksioomat ovat nimittäin riittämättömät tarvittaviin todistuksiin: muun muassa pisteiden järjestyksestä suoralla ei puhuta, eikä siitä miten ympyrät tai suorat leikkaavat. Myös muut olivat luoneet uusia aksiomatisointeja (esimerkiksi Moritz Pasch (1843–1930)), mutta Hilbertin versio oli esteettisesti tyydyttävin, ja hän säilytti Eukleideen teoksen hengen puhumalla nimenomaan pisteistä ja suorista.

Hilbert myös esitti euklidiselle geometrialle lukuteoriaan perustuvan mallin. (Tässä yhteydessä lukuteorialla ei tarkoiteta vain kokonaislukujen vaan kaikkien reaalilukujen teoriaa.) Tason pisteet osattiin ilmaista lukupareina ja suorat yhtälöinä. Hilbert käänsi geometrian aksioomat lukuteorian kielelle ja päätteli, että jos lukuteoria voitaisiin osoittaa ristiriidattomaksi, myös euklidinen geometria olisi sitä. Hilbert ottikin tavoitteeksi lukuteorian ristiriidattomuuden todistamisen.

2 Joukko-oppi ja moderni logiikka

2.1 Joukko-opin synty

Bernhard Bolzano (1781–1848) oli böömiläinen pappi, joka sai potkut Prahan yliopiston uskonnon professuurista kerettiläisyyden vuoksi. Hän oli kiinnostunut myös matematiikasta, erityisesti analyysista, ja tuli kehittäneeksi joukko-oppia, mutta hänen kirjoituksensa eivät saavuttaneet näkyvyyttä.

Georg Cantor (1845–1918) syntyi Pietarissa mutta eli ja vaikutti lähinnä Saksassa, Hallen yliopistossa. Aluksi Cantor tutki lukuteoriaa ja analyysia. Hän osoitti että tiettyihin trigonometrisiin sarjoihin liittyvät yksikäsitteisyystulokset pätivät, vaikka sarjan suppenemista ei vaadittu kaikkialla. Suppenemisjoukon tutkiminen johti vähitellen Cantorin joukko-opin pariin.

Varsinainen joukko-oppi syntyi Cantorin teoksessa *Beitrage zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre* (1895). Cantorin mukaan joukko (Menge) oli ”mikä tahansa kokoelma M määrättyjä ja erillisiä intuition tai päättelyn tuottamia olioita”. Mikä tahansa kuviteltavissa oleva ominaisuus voisi siis määritellä joukon: joukon voivat muodostaa yhtä hyvin irrationaaliluvut tai alle 12-vuotiaat lapset tai kaikki joukot, joissa on tasan viisi alkiota.

Cantor osoitti, että reaalilukujoukkoja on ”eri kokoisia”: joukkoja sanotaan hänen mukaansa yhtä mahtaviksi, jos niiden välillä on olemassa bijektio. Toisinaan bijektio voi löytyä joukon ja sen osajoukon välillä, kuten kokonaislukujen ja niiden neliöiden (minkä huomasi jo Galilei), tai rationaalilukujen ja kokonaislukujen (minkä Cantor todisti). Sen sijaan irrationaalilukuja on yhtä paljon kuin reaalilukuja, ja tämä mahtavuus on aidosti suurempi kuin kokonaislukujen (tai rationaalilukujen) mahtavuus. Sellaista joukkoa, jonka mahtavuus on sama kuin kokonaislukujen, sanotaan numeroituvaksi, ja sellaista, jonka mahtavuus on suurempi, ylinumeroituvaksi.

Erityisen merkittävää oli se, että algebrallisten lukujen joukko (niiden, jotka ovat jonkin polynomiyhtälön ratkaisuja) on numeroituva, joten suurin osa reaaliluvuista ei itse asiassa ole algebrallisia. Ainoat tällaiset ns. transkendenttiluvut, jotka tuolloin tunnettiin, oli löytänyt Liouville vuonna 1844.

Cantorin elinikäiseksi haaveeksi jäi ns. kontinuumihypoteesin ratkaiseminen: onko olemassa joukkoa, jonka mahtavuus olisi aidosti kokonaislukujen ja reaalilukujen mahtavuuksien välissä?

Cantor loi käsitteen kardinaaliluku kuvaamaan äärettömän joukon mahtavuutta samalla tavoin kuin lukumäärä kuvaa äärellisen joukon mahtavuutta. Kardinaaliluvun määritelmä ei ollut täsmällinen: se oli jotain, mikä olisi yhteistä kaikille yhtä mahtaville joukoille. Cantor nimesi kokonaislukujen mahtavuuden kardinaaliluvulla $\aleph_0$ ja osoitti, että se on pienin ääretön kardinaali. Hän osoitti myös, että tasossa on yhtä monta pistettä kuin suoralla.

Leopold Kronecker (1823–1891), Cantorin ohjaaja, oli Cantorin teorioiden vastustaja. Hänen mielestään kaiken matematiikan piti olla johdettavissa luonnollisista luvuista äärellisessä määrässä askelia. Kronecker oli korkeassa asemassa Berliinissä ja esti tehokkaasti Cantorin pyrkimykset edetä urallaan. Cantorin tukijoita olivat Richard Dedekind (1831–1916) ja ruotsalainen Gösta Mittag-Leffler (1846–1927), joista viimeksi mainittu oli perustanut oman lehden *Acta Mathematica*. Mittag-Leffler myös käänsi Cantorin kirjoituksia ranskaksi. Katkera taistelu uuvutti Cantorin, ja hän vietti elämänsä loppupuolella paljon aikaa parantoloissa.

Todistaessaan reaalilukujen ylinumeroituvuutta Cantor keksi ns. diagonaaliargumentin. (Cantorin alkuperäinen todistus ei hyödyntänyt diagonaalipäättelyä, mutta hän julkaisi pian uuden, siistimmän todistuksen.) Cantor teki vastaoletuksen, jonka mukaan reaalilukujen joukko olisi numeroituva. Tällöin myös avoimella välillä $(0, 1)$ olisi vain numeroituva määrä reaalilukuja. Kaikkien niiden desimaaliesitykset voitaisiin siis laittaa allekkain positiivisten kokonaislukujen vierelle alla olevan taulukon mukaisesti (voidaan olettaa, että kaikki desimaaliesitykset ovat päättymättömiä korvaamalla nollaan päättyvät vastaavalla yhdeksikköihin päättyvällä esityksellä, esim. 0,5 = 0,49999 . . .):

$$
\begin{array}{ll}
1 & 0,\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15} \ldots \\
2 & 0,\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25} \ldots \\
3 & 0,\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35} \ldots \\
4 & 0,\ a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44}\, a_{45} \ldots \\
5 & 0,\ a_{51}\, a_{52}\, a_{53}\, a_{54}\, a_{55} \ldots \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

Kuvion diagonaalille muodostuu desimaalikehitelmä $0, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \ldots$. Muodostetaan nyt luku $b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ siten, että desimaali b_i on 1, paitsi jos diagonaalikehitelmässä on $a_{ii} = 1$, jolloin asetetaan $b_i = 2$. Nyt luku b on välillä $(0, 1)$, mutta sen desimaalikehitelmän kaikki numerot ovat erejä kuin diagonaalilla vastaavassa paikassa oleva numero. Tällöin b ei voi olla yllä kuvatussa taulukossa, koska jos se olisi taulukon i:nnellä rivillä, täytyisi olla $b_i = a_{ii}$. Siispä vastaoletus on väärä, ja reaalilukujen joukko on ylinumeroituva.

2.2 Joukko-opin paradoksit

Englantilainen Bertrand Russell (1872–1970) keksi vuonna 1902 Cantorin joukkoihin liittyvän paradoksin: ei voi olla olemassa joukkoa, joka sisältäisi vain sellaiset joukot, jotka eivät sisällä itseään. Tämä aiheutti joukko-opin vastustajissa (esim. Poincaré) ilonilmauksia, mutta puolustajissa tarpeen määritellä joukot hieman täsmällisemmin. Myös Burali-Fortin ja Cantorin kehittämät paradoksit viittasivat siihen, että Cantorin esittämä joukon määritelmä oli liian yleinen.

Russellin paradoksi myös mitätöi saksalaisen Gottlob Fregen (1848–1925) symbolista logiikkaa ja matematiikan perusteita käsittelevän laajan teoksen *Begriffsschrift, einer der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879). Toisen osan ollessa juuri painossa Frege sai kirjeen Russellilta, ja hän ehti juuri ja juuri lisätä liitteen, jossa sanoi: ”Tiedemies voi tuskin kohdata mitään niin epämiellyttävää, kuin että hänen työnsä alta vedetään pohja juuri sen valmistuessa. Tähän asemaan minut asetti herra Bertrand Russelilta saamani kirje juuri tämän opuksen painamisen lähestyessä loppuaan."

Paradokseista päästiin eroon tarkentamalla joukon käsitettä ja luomalla sille aksiomaattinen pohja. Erityisesti esiteltiin komprehensioaksiooma, jonka mukaan mielivaltaisilla ominaisuuksilla voisi määritellä vain uusia osajoukkoja jo tunnetuille joukoille. Parhaan aksioomajärjestelmän tarjosi saksalainen Ernst Zermelo (1871–1953), jonka paranneltua versiota kutsutaan nykyisin Zermelon–Fraenkelin aksioomiksi.

2.3 Optimismi ja sen loppu

20. vuosisadan alussa matemaattisessa logiikassa oli vallalla kolme koulukuntaa. Russellin edustamien logisistien mielestä kaikki matematiikka voitiin palauttaa symboliseen logiikkaan. Logiikka on siis perustavanlaatuisessa asemassa matematiikkaan nähden. Jättimäinen kolmiosainen opus *Principia Mathematica* (1910–1913), jonka Russell kirjoitti Alfred Whiteheadin (1861–1947) kanssa, sisältää joukon aksioomia ja päättelysääntöjä, joista kaiken matematiikan pitäisi olla johdettavissa. Teos on raskaslukuinen eikä kovin käytännöllinen, mutta se onnistuu osoittamaan, miten matemaattisia perustuloksia tosiaan voidaan johtaa mielivaltaisen yksinkertaisilta tuntuvista lähtökohdista.

Intuitionistinen koulukunta, jonka johtohahmo oli hollantilainen Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966), puolestaan vaati, että kaiken matematiikan on perustuttava intuitiivisesti selkeisiin päättelyihin. Kuten Kronecker aiemmin, intuitionistit hyväksyivät lähtökohdaksi luonnolliset luvut ja äärelliset päättelyketjut. Erityisesti kolmannen poissuljetun sääntö äärettömiä joukkoja tarkasteltaessa oli ehdottomasti kiellettyä, mikä johti intuitionistit julistamaan hyvin suuren osan matematiikkaa perusteettomaksi.

David Hilbert puolestaan loi ns. formalistisen koulukunnan. Hänen johtoajatuksenaan oli, kuten logisisteilla, matematiikan palauttaminen perusaksioomiin, mutta hän ei puoltanut logiikan etuasemaa matematiikkaan nähden. Hänen mielestään logiikka oli pääasiassa jotain, millä matemaattisia päättelyitä voidaan ilmaista täsmällisesti ja tutkia.

Hilbertin ja hänen kannattajiensa suurena tavoitteena oli perustaa kaikki matematiikka lukuteoriaan ja sen jälkeen osoittaa lukuteorian ristiriidattomuus. Hilbertin mielestä matemaattisen olion olemassaolon takuu oli sitä koskevan teorian ristiriidattomuus, minkä vuoksi hän piti ristiriidattomuustodistuksia erityisen oleellisina matematiikassa (hänhän oli itse todistanut *Grundlagenissa* geometrian ristiriidattomuuden riippuvan lukuteorian ristiriidattomuudesta). Hilbertin laatimassa 23 tärkeimmän matemaattisen ongelman listassa (1900) kaksi ensimmäistä ongelmaa olivat kontinuumihypoteesin ratkaiseminen sekä lukuteorian ristiriidattomuuden osoittaminen.

Hilbertin optimismi sai karun lopun 1930, kun nuori itävaltalainen Kurt Gödel (1906–1978) ilmoitti hänelle todistamistaan epätäydellisyyslauseista. Niiden mukaan jokaisessa riittävän monipuolisessa matemaattisessa teoriassa (kuten lukuteoriassa) on väistämättä lauseita, joita ei voi todistaa oikeaksi tai vääräksi itse systeemin sisällä. Mikä pahinta, yksi niistä lauseista oli teorian ristiriidattomuus. Tämä sai monet matemaatikot luopumaan formalismin perustavoitteesta ja toteamaan yksikantaan ”ignorabimus”, emme tule tietämään. Hilbert taisteli kuitenkin tällaista asennetta vastaan mm. kuuluisassa vuoden 1930 eläkkeellejäämispuheessaan todeten lopuksi ”wir müssen wissen, wir werden wissen”, meidän täytyy tietää, me tulemme tietämään.

Gödelin onnistui myös todistaa, että kontinuumihypoteesi on yhteensopiva joukko-opin aksioomien kanssa, mutta vasta vuonna 1963 amerikkalainen Paul Cohen (1934–2007) osoitti, että kontinuumihypoteesi on myös riippumaton muista aksioomista, samaan tapaan kuin paralleeliaksiooma on riippumaton muista Eukleideen aksioomista. Voimme siis halutessamme ajatella sen joko todeksi tai epätodeksi, ja kummankin tuloksena on omanlaisensa reaalilukujen teoria.