Matematiikan historia

Algebran historiaa
Lukuteorian historiaa

Johanna Rämö
johanna.ramo@helsinki.fi

Algebran historiaa

Yhtälöiden ratkaiseminen ja mitä siitä seurasi

Algebran historiaa: Babylonia

- Noin 1800–1600 eKr.
- Matematiikkaa kirjoitettiin nuolenpääkirjoituksella savilaatoille.
- Monet ongelmista eivät olleet käytännön ongelmia. Ongelmanratkaisun ilo!
- Vaikka laatoissa ei olekaan yleisiä tuloksia, käytännön esimerkit kuvaavat ratkaisumentelmiä.

Babylonia

- Babylonialaiset käyttivä 60-järjestelmää.
- Kirjoitetaan selvyyden vuoksi numeroiden väliin pilkut: esimerkiksi $3, 25, 4$.
- Näissä kalvoissa kokonaisluvut erotetaan murtoluvuista puolipisteellä.

Babylonia: toisen asteen yhtälöt

- Babylonialaiset tunsivat 2. asteen yhtälön ratkaisukaavan.
- Niitä syntyi erityisesti ongelmista, jotka liittyivät pinta-aloihin.
- Uskottiin, että piiri kertoo pinta-alan!

Babylonia

Olen laskenut yhteen neliöni pinta-alan ja kaksi kolmannesta sen sivusta saaden tulokseksi $0;35$. *Mikä on neliöni sivun pituus?*

Ratkaisu: Ota 1, kerroin. Kaksi kolmasosaa luvusta 1 on $0;40$. Puolet tästä on $0;20$, kerro luvulla $0;20$ ja se $0;6,40$ laske yhteen $0;35$ ja $0;41$ neliöjuurena on $0;50$. Luku $0;20$, jonka kerroit itsellään, vähennä luvusta $0;50$ ja $0;30$ on sivu.

Babylonia

Ratkaisu moderneilla merkinnöillä:

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30.$$

Tämä vastaa 2. asteen yhtälön ratkaisukaavaa.

Diofantos

- Aleksandria, noin vuoden 200 tienoilla.
- Kirjoitti teoksen Arithmetica.
- Varhaisin tunnettu algebraa käsittelevä kirja. Sisälsi ongelmia ratkaisuineen.
- Kehitti tavan ilmaista algebrallisia käsitteitä symbolein.

Tehtävä

(a) Kirjoita taululla oleva yhtälö moderneilla merkinnöillä.

(b) Kirjoita yhtälö

$$3x^6 - x^4 - 2x^2 + 3 = 0$$

Diofantos merkinnöillä.

Algebran historiaa: arabit

- al-Khwârizmî (Bagdad, 800-luku)
- Kokosi yhteen tuntemiaan tuloksia kirjaan: Hisab al-jabr w'al muqâbalah (Yhteenliittämisen ja vähentämisen tiede).

$$\begin{aligned} 6x^2 - 4x + 1 &= 5x^2 + 3 \\ 6x^2 + 1 &= 5x^2 + 4x + 3 \\ x^2 &= 4x + 3 \end{aligned}$$

- Latinankielinen käännös Liber algebrae et almucabula levisi Euroopassa

Arabit: toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

- Yhtälöt jaettiin kolmeen eri tyyppiin:
  (a) $x^2 + ax = b$
  (b) $x^2 + b = ax$
  (c) $x^2 = ax + b$
- Vain positiiviset kertoimet kelpasivat!

Arabit: toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

Ratkaistaan yhtälö $x^2 + 10x = 39$.

Tehtävä

Ratkaise arabien tapaan yhtälö

a) $x^2 + 8x = 9$

b) $3x^2 + 10x = 32.$

Kolmannen asteen yhtälöt: 1500-luvun Italia

- Matemaatikoiden taistelut
- del Ferron oppilas Fiore
- Tartaglia
- Cardan ja Ars Magna
- Ferron ja Tartaglian tekniikoita yhdistelemällä sekä omien tulostensa avulla Cardan löysi yleisen menetelmän 3. asteen yhtälön ratkaisemiseksi.

Tehtävä

(a) Yhtälöstä $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ voidaan eliminoida toisen asteen termi sijoituksella $x = y - a/3$. Ratkaise yhtälö

$$x^3 + 11x = 6x^2 + 6.$$

(b) Yhtälöllä $x^3 + px = q$ on ratkaisu

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

kun $p > 0$ ja $q > 0$. Ratkaise yhtälö $x^3 + 15x = 6x^2 + 18$.

Kolmannen asteen yhtälöt: kompleksiluvut

- Toisinaan Cardanon kaavassa piti ottaa neliöjuuria negatiivisista luvuista. Tätä pidettiin mahdottomana ja ratkaiseminen lopetettiin siihen.
- Bombelli huomasi, että jos välivaiheissa käsitteli negatiivisten lukujen neliöjuuria kuten tavallisia lukuja, saattoi lopputuloksena kuitenkin olla reaalilukuratkaisu.
- Negatiivisten lukujen neliöjuuria ei kuitenkaan pidetty oikeina lukuina. Ne olivat vain apuvälineitä reaaliratkaisujen löytämisessä.

Sivupolku: Hamilton ja kvaterniot

- Irlanti, 1805–1865
- Hamilton ymmärsi, että kompleksiluvut voidaan kirjoittaa reaalilukupareina.
- Näille pareille voidaan määritellä yhteen- ja kertolasku.
- Hienointa on, että kompleksiluvuilla voi myös jakaa!
- Miten saman voisi tehdä reaalilukukolmikoilla (a, b, c)?
- Tarvitaankin neljä dimensiota!

Neljännen asteen yhtälö

- Cardanin oppipoika Ferrari löysi 4. asteen yhtälölle ratkaisukaavan.
- Cardanin ja Tartaglian välillä alkanut loanheitto jatkui kiivaana.

Viidennen asteen yhtälöt

- Paolo Ruffini (Italia, 1765–1822) osoitti, ettei 5. asteen yhtälölle ole ratkaisukaavaa.
- Norjalainen Niels Abel osoitti saman hieman myöhemmin ja ehkäpä myös paremmin.

Viidennen asteen yhtälöt: Galois

- Ranska, 1811–1832
- Milloin yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa kertolaskun, yhteenlaskun ja juurten avulla?
- Galois osoitti, että yhtälön juurten symmetriat antavat tähän vastauksen.
- Galois oli tällöin vain 17-vuotias.
- Modernin ryhmäteorian alku.

Lukuteorian historiaa

Eukleides ja Fermat

Lukuteorian historiaa: Eukleides

- Aleksandriassa, 300 eKr.
- ”Geometrian alkeet” on 13-osainen teos, joka käsittelee geometrian lisäksi muun muassa kokonaislukujen jaollisuutta.
- Teoksessa hienoa on looginen rakenne.
- Eukleides esittelee lähes kakki tulokset, jotka esitetään esim. kurssilla Algebra I.
- Myös todistukset ovat varsin samanlaisia.
- Kaikki luvut ovat janojen pituuksia, aloja tai tilavuuksia.

Täydelliset luvut

- Täydellisiä lukuja olivat löytäneet jo kreikkalaiset.
- Lukuteoriaan liittyi paljon taikauskoa.
- Paljonko täydellisiä lukuja on? Millaisia ne ovat?

Tehtävä

Positiivisen kokonaisluvun n sanotaan olevan täydellinen, jos n on itseään pienempien positiivisten tekijöidensä summa.

(a) Osoita, että 496 on täydellinen.

(b) Osoita, että kahden parittoman alkuluvun tulo ei voi olla täydellinen.

Täydellisten lukujen löytäminen

Eukleides:

Jos luku $2^k - 1$ on alkuluku, niin $2^{k-1}(2^k - 1)$ on täydellinen luku.

Lukuteoria: Fermat

- Pierre de Fermat, Ranska, 1601–1665.
- Jätti usein perustelut kirjoittamatta ja teki todistukset vain päässään.

Fermat'n suuri lause

On mahdotonta kirjoittaa kuutiota kahden kuution summana, neljättä potenssia kahden neljännen potenssin summana ja yleistäen, on mahdotonta kirjoittaa toista potenssia suurempaa potenssia kahden samanlaisen potenssin summana. Olen keksinyt tälle aivan ihmeellisen todistuksen, mutta marginaali on sille liian pieni.

Fermat'n suuri lause

- Andrew Wiles todisti lauseen vuonna 1994.
- Todistamisessa käytetyt työkalut kehittivät monia matematiikan aloja.