

Oheiset tehtävät liittyvät differentiaaliyhtälöiden sovelluksiin, joita on esitelty materiaalin luvussa 2 sekä kurssin verkkosivulta löytyvässä lisäliitteessä (Salas ja Hille: Damped Vibrations). Tehtävien ratkaisut on tarkoitus palauttaa kirjallisina luennoitsijalle **viimeistään tiistaina 28.8.** Tämän jälkeen tehtävät tarkistetaan, ja virheellisiä saa yrittää uudelleen. Tehtävistä ei saa lisäpisteitä, mutta **vähintään 8 tehtävää** tulee olla ratkaistu oikein, ennen kuin kurssin suoritus hyväksytään.

1. Bakteerien kasvua mallinnettiin eksponentiaalisena. Olettaen, että alussa bakteeripopulaation massa on 1 mg ja yhden viikon kuluttua 40 g, selvitä Malthusin parametrin arvo (yksiköineen).
2. Paistin lämpenemisnopeus uunissa on suoraan verrannollinen uunin ja paistin lämpötilojen erotukseen. Uunin lämpötila pysyy vakiona. Muotoile tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö ja ratkaise siitä paistin lämpötila ajan funktiona, kun tiedetään että uunin lämpötila on 150 astetta, paistin alkulämpötila 20 astetta ja tunnin päästä paistin lämpötila on 80 astetta.
3. Ratkaise logistinen differentiaaliyhtälö separoimalla. Mitkä ovat triviaaliratkaisut?
4. Tarkastellaan vielä tehtävän 1 bakteereja. Toisissa olosuhteissa 1 milligramman bakteeripopulaation havaittiin aluksi lisääntyvän rajusti, mutta sitten kasvu taittui eikä populaation massa ylittänyt 20 grammaa (vaikka lähestyikin sitä jatkuvasti). Jos oletetaan populaation kasvun noudattavan logistista mallia, määritä törmäysintensiteetti  $\alpha$ , kun syntyvyys- ja kuolleisuusparametrien ei uskota muuttuneen tehtävän 1 tilanteesta.
5. Maastoalueeseen virtaa läheisestä tuotantolaitoksesta rikkiä sisältävää liuosta, jonka pitoisuus on 3 g/l, tasaisella vauhdilla 5 l/vrk. Olosuhteista johtuen (kuiva kausi) maastoon muualta virtaavan puhtaan veden määrä on sama kuin siitä haihtuvan, joten sitä ei tarvitse ottaa huomioon. Rikkiä sisältävää liuosta poistuu (kasvien suodattamana) 1 l/vrk. Muodosta tilannetta kuvaava differentiaaliyhtälö, kun alussa puhtaan veden määrä maastoalueessa on 2000 litraa ja siinä ei esiinny yhtään rikkipäästöjä.
6. Ratkaise edellisen tehtävän differentiaaliyhtälö ja selvitä sen avulla, kuinka kauan on odotettava, että maastoveden rikkipitoisuudeksi tulee 1 g/l.

7. 5000 asukkaan kylässä havaitaan vaarallista sorsainfluenssaa, jonka kestoparametri  $\alpha$  on 0,10 (yksikkönä  $\text{vrk}^{-1}$ ) ja tarttumisintensiteetti  $4,0 \cdot 10^{-5}$  ( $\text{vrk}^{-1}$ ). Kirjoita tilannetta kuvaava SIS-mallin mukainen (logistinen) differentiaaliyhtälö, kun oletetaan, että tarkastelujaksossa kukaan ei ehdi kuolla tautiin eikä populaatioon ehdi syntyä uusia jäseniä?
8. Edellisen tehtävän kylässä tarttumaintensiteettiä pienennetään määräämällä ulkonaliikkumiskielto. Kuinka pieneksi intensiteetti olisi saatava, jotta epidemiaa ei syntyisi.
9. Sorsainfluenssan todettu tappavan kantajistaan puolet, ja parantuneet saavat elinikäisen immunitetin. Tarkastellaan tehtävän 7 kylässä tilannetta SIR-mallin kannalta. Jos ulkonaliikkumiskielto epäonnistuu, kuinka moni kylän asukkaista lopulta kuolee tautiin?
10. Jouseen, jonka jousivakio on 50 N/m, on kiinnitetty 1 kilogramman massainen kappale. Kappale liikkuu nesteessä, joka vaimentaa sen värähdysliikettä, ja vaimennus on suorassa suhteessa liikkeen nopeuteen. Nesteen viskositeettia voidaan säätää, mikä vaikuttaa vaimennuskertoimeen. Mikä vaimennuskertoimen olisi oltava, jotta saavutettaisiin kriittinen vaimennus eli jotta jousi ei värähtelisi lainkaan edestakaisin?
11. Eräessä tilanteessa edellisen tehtävän vaimennuskertoimen arvoksi mitattiin 6 kg/s. Jos jousen liikkeen amplitudi (eli liikkeen maksimilajuus) on alussa 0,5 m, mikä on amplitudi 2 sekunnin jälkeen?