Differentiaaliyhtälöt I
Kurssikoe 6.9.2012
Ratkaisuehdotuksia ja arvosteluperusteet (9 sivua)

Tehtävä 1. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden kaikki ratkaisut ja ratkaisujen (maksimaaliset) määrittelyvälit:

$$\text{a)}\quad y' = \frac{y^2}{1+x} \qquad\qquad \text{b)}\quad (t^2+1)\dot{x} + 2tx = t.$$

Ratkaisu. **a)** Yhtälö on separoituva, sillä se on muotoa $y' = p(x)q(y)$, missä $p(x) = 1/(1+x)$ ja $q(y) = y^2$. (Voimme olettaa, että $x \neq -1$, koska muuten yhtälössä ei ole järkeä.) Yhtälöllä on triviaaliratkaisuna vakiofunktio $y = 0$.

Koska p ja q ovat määrittelyjoukoissaan jatkuvia ja q lisäksi jatkuvasti derivoituva, OY-lauseen ehdot pätevät, eivätkä muut kuin triviaaliratkaisu saa koskaan arvoa 0 (ratkaisut eivät leikkaa toisiaan). Voidaan siis jakaa termillä y^2 ja integroida:

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{1+x} &\iff \int \frac{y'}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&\iff -\frac{1}{y} = \ln|1+x| + C \\
&\iff y = -\frac{1}{\ln|1+x| + C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Näin on saatu kaikki triviaaliratkaisusta poikkeavat ratkaisut.

Triviaaliratkaisun maksimaaliset määrittelyvälit ovat välit $(-\infty, -1)$ ja $(-1, \infty)$. (Vaikka vakiofunktio onkin määritelty kaikkialla, yhtälön muodon takia ei saa olla $x = -1$.) Muilla ratkaisuilla on lisäksi ehtona, että ratkaisun nimittäjä ei saa olla nolla, eli $\ln|1+x| + C \neq 0$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x \neq -1 \pm e^{-C}$. Maksimaalisia ratkaisuvälejä on siis neljä:

$$(-\infty, -1-e^{-C}), \quad (-1-e^{-C}, -1), \quad (-1, -1+e^{-C}), \quad \text{ja} \quad (-1+e^{-C}, \infty).$$

b) Yhtälön voi ratkaista ainakin neljällä eri tavalla. (Kokeen laatija ei itsekään huomannut tätä. Kaikkia tapoja oli kuitenkin yritetty vastauksissa. Hyvä!) Tarkastellaan ensin sitä tapaa, joka oli kokeen laatijalla mielessä.

Tapa 1. Termi $1 + x^2$ on aina positiivinen. Jakamalla sillä yhtälö tulee muotoon

$$\dot{x} + \frac{2t}{t^2+1}x = \frac{t}{t^2+1}.$$

Yhtälö on siis muotoa $\dot{x} + p(t)x = q(t)$, eli lineaarinen. Sen integroiva tekijä on

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}x\right) = e^{\ln(t^2+1)} = t^2+1.$$

Kerrotaan lineaarinen yhtälö puolittain integroivalla tekijällä ja ratkaistaan x:

$$\begin{aligned}
&(t^2+1)\left(\dot{x}+\frac{2t}{t^2+1}x\right)=(t^2+1)\cdot\frac{t}{t^2+1}\\
\iff\quad &(t^2+1)\dot{x}+2tx=t\\
\iff\quad &D\big((t^2+1)x\big)=t\\
\iff\quad &(t^2+1)x=\int t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2+C\\
\iff\quad &x=\frac{\frac{1}{2}t^2+C}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

Ratkaisu on määritelty kaikilla t, joten maksimaalinen määrittelyväli on $\mathbb{R}$.

Tapa 2. Edellisestä ratkaisusta voidaan huomata, että kun lineaarisessa muodossa oleva yhtälö kerrotaan integroivalla tekijällä, saadaan takaisin alkuperäinen yhtälö. Olisi siis voitu suoraan lähteä ratkaisemaan

$$(t^2+1)\dot{x}+2tx=t \iff D\big((t^2+1)x\big)=t \iff \dots$$

Tapa 3. Siirtelemällä hieman termejä saadaan alkuperäinen yhtälö muotoon

$$2tx-t+(t^2+1)\dot{x}=0.$$

Merkitään $M=2tx-t$ ja $N=t^2+1$. Nyt $\partial M/\partial x=2t=\partial N/\partial t$, eli yhtälö on eksakti. Etsitään sille potentiaali F.

Tiedetään, että $\partial F/\partial x=N$, joten

$$F(t,x)=\int N\,\mathrm{d}x=\int t^2+1\,\mathrm{d}x=(t^2+1)x+h(t).$$

Tässä $h(t)$ on jokin t:stä riippuva lauseke. Koska $\partial F/\partial t=M$, nähdään että

$$2tx+h'(t)=2tx-t \iff h'(t)=-t.$$

Voidaan siis valita $h(t)=-\frac{1}{2}t^2$, jolloin potentiaali on $F=(t^2+1)x-\frac{1}{2}t^2$. Implisittiratkaisuksi tulee $(t^2+1)x-\frac{1}{2}t^2=C$, josta voidaan vielä ratkaista x:

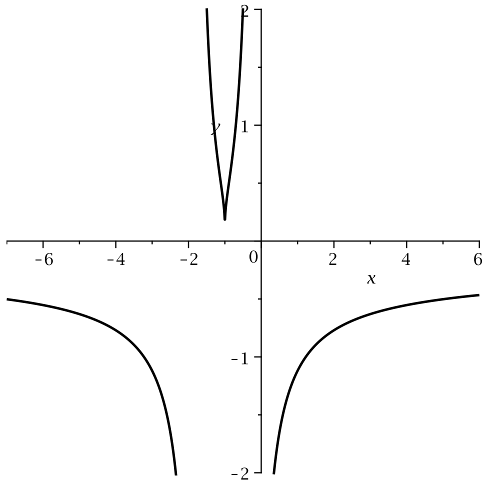
$$x=\frac{\frac{1}{2}t^2+C}{t^2+1}.$$

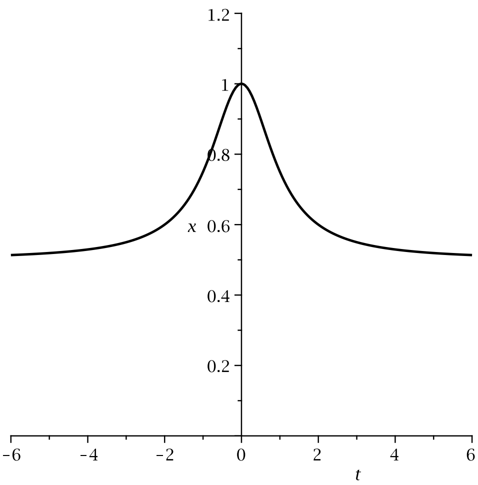
Tapa 4. Siirtelemällä alkuperäisen yhtälön termejä vielä uudella tavalla se saadaan muotoon

$$\dot{x}=\frac{t}{t^2+1}(-2x+1).$$

Yhtälö on siis myös separoituva! Triviaaliratkaisuna on $x = -1/2$. Muut ratkaisut eivät saa arvoa $-1/2$, joten voidaan jakaa ja integroida normaaliin tapaan:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}}{-2x+1} = \frac{t}{t^2+1} \iff & \int \frac{\dot{x}}{-2x+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
\iff & -\frac{1}{2}\ln|-2x+1| = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C_1 \\
\iff & \ln|-2x+1| = -\ln(t^2+1) + C_1 \\
\iff & |-2x+1| = e^{-\ln(t^2+1)+C_1} \\
\iff & -2x+1 = \frac{C_2}{t^2+1} \qquad (C_2 = \pm e^{C_1}) \\
\iff & x = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_2}{t^2+1} - 1\right) = \frac{\frac{1}{2}t^2 + C}{t^2+1} \quad \left(C = \frac{1}{2}(1 - C_2)\right).
\end{aligned}$$





KUVA 1. Tehtävien 1.a) ja 1.b) ratkaisujen kuvaajat vakioiden arvoilla $C = 1/5$ ja $C = 1$.

Arvostelu. Sekä a)- että b)-kohdasta sai maksimissaan 6 pistettä. Kummassakin kohdassa yhtälön tunnistamisesta tietyntyyppiseksi sai 2 pistettä ja ratkaisumenetelmän osaamisesta toiset 2. Loput 2 pistettä tulivat oikeiden määrittelyvälien määrittämisestä. Useimmilta puuttui a)-kohdassa huomio, että yleisen ratkaisun nimittäjä ei saa olla nolla, ja tästä vähennettiin 1 piste. Samaten a)-kohdan triviaaliratkaisun määrittelyjoukkoa ei juuri kukaan ollut maininnut, mutta tämä päätettiin jättää huomiotta. Triviaaliratkaisun puuttumisesta kokonaan sen sijaan rokotettiin 1 piste. Erilaisista laskuvirheistä meni 1–2 pistettä vakavuuden mukaan.

Tehtävä 2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$2x + ye^x + (e^x - \cos y)y' = 0, \quad y(1) = 0.$$

Perustele myös ratkaisun yksikäsitteisyys.

Ratkaisu. Merkitään $M(x,y) = 2x + ye^x$ ja $N(x,y) = e^x - \cos y$. Huomataan, että

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \quad \text{ja} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x,$$

ja koska nämä osittaisderivaatat ovat samat, yhtälö on eksakti. Etsitään sille potentiaali F.

Tiedetään, että $\partial F/\partial y = N$, joten

$$F(x,y) = \int N \,\mathrm{d}y = \int e^x - \cos y \,\mathrm{d}y = ye^x - \sin y + h(x).$$

Tässä $h(x)$ on jokin x:stä riippuva lauseke. Koska $\partial F/\partial x = M$, nähdään että

$$ye^x + h'(x) = 2x + ye^x \iff h'(x) = 2x.$$

Voidaan siis valita $h(x) = x^2$, jolloin potentiaali on $F(x,y) = ye^x - \sin y + x^2$.

Yhtälön yleinen implisiittiratkaisu on $F(x,y) = C$, missä $C \in \mathbb{R}$, eli

$$ye^x - \sin y + x^2 = C.$$

Ratkaistaan vakio C alkuarvoehdon avulla. Sen mukaan ratkaisun tulee kulkea pisteen $(1,0)$ kautta, joten

$$0 \cdot e^1 - \sin 0 + 1^2 = C \iff C = 1.$$

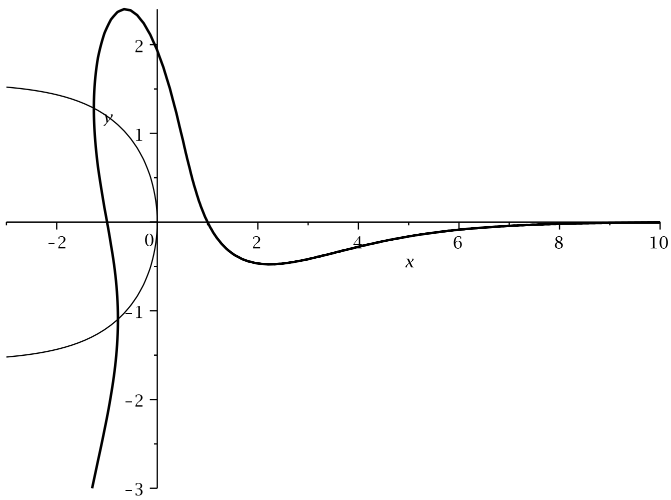
Lopulliseksi (implisiitti)ratkaisuksi saadaan siis

$$ye^x - \sin y + x^2 = 1.$$

Perustellaan lopuksi ratkaisun yksikäsitteisyys. Kun $e^x - \cos y \neq 0$, alkuperäinen yhtälö voidaan saattaa normaalimuotoon:

$$y' = -\frac{2x + ye^x}{e^x - \cos y}.$$

Normaalimuodon oikea puoli on selvästi määrittelyjoukossaan jatkuva sekä muuttujan y suhteen jatkuvasti derivoituva, joten OY-lauseen ehdot pätevät alueessa, jossa $e^x - \cos y \neq 0$. Koska alkuarvopiste $(1,0)$ on tässä alueessa (nimittäin $e^1 - \cos 0 = e - 1 \neq 0$), alkuarvotehtävän ratkaisu on OY-lauseen perusteella yksikäsitteinen.



Kuva 2. Tehtävän 2 alkuarvotehtävän implisiittiratkaisun kuvaaja. Ohuempi viiva kuvaa yhtälön $e^x = \cos y$ ratkaisujoukkoa. Eksplisiittiratkaisun määrittelyjoukko päättyy, kun implisiittiratkaisun käyrä ylittää ohuen viivan. Tällöin nimittäin kuvaaja nousee pystyyn eikä ole enää derivoituvan funktion kuvaaja.

Arvostelu. Eksaktiuden tarkistamisesta sai 2 pistettä ja potentiaalin määrittämisestä yhteensä 4. Yleisen ratkaisun oikeasta muodosta annettiin 1 piste ja alkuarvoehdon oikeasta käytöstä C:n ratkaisemiseksi sai 2. Loput 3 pistettä tuli yksikäsitteisyyden tarkistamisesta. Jos tässä ei ollut maininnut, että alkuarvopisteen täytyy kuulua OY-lauseen ehtojen pätevyysalueeseen, menetti 2 pistettä. Laskuvirheistä menetti 1–3 pistettä vakavuuden mukaan.

Tehtävä 3. Valitse ja ratkaise toinen seuraavista yhtälöistä.

$$\text{a)}\quad 4y'' - 4y' + y = x^2 + 4\sin x \qquad\qquad \text{b)}\quad y' = \frac{-x+y+1}{x+y-2}$$

Ratkaisu. **a)** Ratkaistaan ensin tehtävän yhtälöä vastaava homogeeniyhtälö

$$4y'' - 4y' + y = 0.$$

Homogeeniyhtälön karakteristinen polynomi on $4r^2 - 4r + 1 = (2r-1)^2$, ja tällä on kaksoisjuuri $r = 1/2$. Homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y_h(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x},$$

missä C_1 ja C_2 ovat mielivaltaisia vakioita.

Etsitään sitten alkuperäiselle yhtälölle yksittäisratkaisu yritteiden avulla. Jaetaan yhtälö kahteen osaan:

$$4y'' - 4y' + y = x^2 \tag{1}$$

$$\text{ja}\qquad 4y'' - 4y' + y = 4\sin x, \tag{2}$$

ja etsitään näille yksittäisratkaisut $y_{p,1}$ ja $y_{p,2}$.

Osa 1. Oikean puolen termiä x^2 varten kokeillaan yritettä

$$y_{p,1}(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

jonka derivaatat ovat $y'_{p,1} = 2Ax+B$ ja $y''_{p,1} = 2A$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (1) saadaan

$$\begin{aligned} & 4y''_{p,1} - 4y'_{p,1} + y_{p,1} = x^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8A - 4(2Ax+B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & Ax^2 + (-8A+B)x + 8A - 4B + C = x^2. \end{aligned}$$

Jotta $y_{p,1}$ olisi ratkaisu, on seuraavan yhtälöryhmän pädettävä:

$$\begin{cases} A &= 1 \\ -8A + B &= 0 \\ 8A - 4B + C &= 0\,. \end{cases}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu on $A = 1$, $B = 8$, $C = 24$. Näin ollen etsitty yksittäisratkaisu on

$$y_{p,1}(x) = x^2 + 8x + 24,$$

Osa 2. Oikean puolen termiä $4\sin x$ varten kokeillaan yritettä

$$y_{p,2}(x) = A\sin x + B\cos x,$$

jonka derivaatat ovat

$$y'_{p,2} = A\cos x - B\sin x \quad \text{ja} \quad y''_{p,2} = -A\sin x - B\cos x.$$

Sijoitetaan nämä yhtälöön (2):

$$\begin{aligned} & 4y''_{p,2} - 4y'_{p,2} + y_{p,2} = 4\sin x \\ \iff\quad & 4(-A\sin x - B\cos x) - 4(A\cos x - B\sin x) + (A\sin x + B\cos x) = 4\sin x \\ \iff\quad & (-3A+4B)\sin x + (-4A-3B)\cos x = 4\sin x. \end{aligned}$$

Tämä johtaa yhtälöpariin

$$\begin{cases} -3A+4B &= 4 \\ -4A-3B &= 0\,, \end{cases}$$

jonka hiukan ikävähkö ratkaisu on $A = -12/25$, $B = 16/25$. Täten haettu yksittäisratkaisu on

$$y_{p,2}(x) = -\frac{12}{25}\sin x + \frac{16}{25}\cos x.$$

Lineaarisuudesta seuraa nyt, että koko yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa $y = y_h + y_{p,1} + y_{p,2}$ eli

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{\frac{1}{2}x} + x^2 + 8x + 24 - \frac{12}{25}\sin x + \frac{16}{25}\cos x.$$

Arvostelu. Homogeeniyhtälön ratkaisemisesta sai 3 pistettä. Yritteiden soveltamisesta oikein sai ensimmäisestä 4 ja toisesta 3 pistettä. Täydellisen yhtälön ratkaisun kirjoittamisesta summana homogeeniyhtälön ratkaisusta ja yksittäisratkaisuista sai loput 2 pistettä.

b) Yhtälö palautuu tasa-asteiseksi sopivalla sijoituksella. Asetetaan $x = t + \alpha$ ja $y(x) = z(t) + \beta$, jolloin $y'(x) = z'(x-\alpha)\cdot 1 = z'(t)$, ja yhtälö tulee muotoon

$$z'(t) = \frac{-t-\alpha+z+\beta+1}{t+\alpha+z+\beta-2} = \frac{-t+z-\alpha+\beta+1}{t+z+\alpha+\beta-2}. \tag{3}$$

Pyritään hävittämään osoittajasta ja nimittäjästä vakiotermit. Tällöin ratkaistavaksi tulee yhtälöpari

$$\begin{cases} -\alpha+\beta &= -1 \\ \alpha+\beta &= 2,. \end{cases}$$

Tämän ratkaisu on $\alpha = 3/2$, $\beta = 1/2$.

Kun α ja β valitaan yllä kuvatulla tavalla, yhtälö (3) saadaan tasa-asteiseksi:

$$z'(t) = \frac{-t+z}{t+z} = \frac{-1+z/t}{1+z/t}.$$

Yhtälö on siis muotoa $z' = f(z/t)$. Tehdään tähän sijoitus $z/t = u$, jolloin $z = ut$ ja $z' = u't + u$. Yhtälö saadaan edelleen muotoon

$$u't + u = \frac{-1+u}{1+u} \iff u' = \frac{1}{t}\left(\frac{-1+u}{1+u} - u\right) = -\frac{1}{t}\cdot\frac{1+u^2}{1+u}. \tag{4}$$

Viimeksi saatu yhtälö (4) on puolestaan separoituva. Triviaaliratkaisuja ei ole, joten kaikki ratkaisut saadaan integroimalla:

$$\begin{aligned} \frac{1+u}{1+u^2}\cdot u' = -\frac{1}{t} \iff & \int \frac{1+u}{1+u^2}\cdot u'\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ \iff & \int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{u}{1+u^2}\cdot u'\,\mathrm{d}t = \int -\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ \iff & \arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|t| + C. \end{aligned}$$

On siis saatu yhtälön (4) yleinen implisiittiratkaisu. Sijoitetaan tähän vielä takaisin alkuperäiset muuttujat. Näin saadaan ensinnäkin

$$\arctan\left(\frac{z}{t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{z}{t}\right)^2\right)+\ln|t|=C,$$

ja lopulta

$$\arctan\left(\frac{y-1/2}{x-3/2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1/2}{x-3/2}\right)^2\right)+\ln|x-3/2|=C.$$

Arvostelu. Sijoituksesta $x=t+\alpha$, $y(x)=z(t)+\beta$ sai 3 pistettä. Syntyneen yhtälöryhmän ratkaiseminen tuotti toiset 3 pistettä. Tasa-asteisuuden tunnistamisesta sai 2 pistettä, siihen tehdystä sijoituksesta $z/t=u$ puolestaan 3 pistettä. Viimeinen piste tuli lopullisesta integroinnista ja vastauksen kirjoittamisesta. Jos kuitenkin lopullista vastausta kirjoitettaessa oli suorittanut takaisinsievennykset väärin, menetti 1–2 pistettä.

Yhtälön olisi voinut ratkaista myös eksaktina. Tätä oli kuitenkin yrittänyt vain yksi henkilö.

Tehtävä 4. Määritä kaikki sellaiset lukuparit (x_0,y_0), että alkuarvotehtävällä

$$(x^2-1)y'-(x-1)y=(x+1)^2(x-1),\quad y(x_0)=y_0,$$

on a) yksi b) ei yhtään c) äärettömän monta ratkaisua.

Ratkaisu. Oletetaan aluksi, että $x\neq\pm1$, jotta voidaan jakaa tehtävän differentiaaliyhtälö tekijällä $(x^2-1)=(x+1)(x-1)$. (Tapaukset, joissa $x=\pm1$ käsitellään myöhemmin.) Näin yhtälö tulee muotoon

$$y'-\frac{1}{x+1}y=x+1. \tag{5}$$

Tämä on 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, kertoiminaan $p(x)=-\frac{1}{x+1}$ ja $q(x)=x+1$. Tiedetään, että OY-lause pätee, kun p ja q ovat jatkuvia funktioita. Alueissa, joissa $x\neq\pm1$, tämä ehto on voimassa. Voidaan siis todeta, että alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $x_0\neq\pm1$ ja y_0 on mielivaltainen.

Ratkaistaan seuraavaksi yhtälö (5) tutulla tavalla. Integroiva tekijä on

$$\exp\left(-\int\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)=e^{-\ln|x+1|}=\pm\frac{1}{x+1}.$$

Voidaan valita esimerkiksi positiivinen merkki. Yhtälö ratkeaa kertomalla puolittain integroivalla tekijällä:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1}\left(y'-\frac{1}{x+1}y\right)=\frac{1}{x+1}(x+1)\\
\iff\quad & D\left(\frac{1}{x+1}y\right)=1\\
\iff\quad & \frac{1}{x+1}y=\int 1\,\mathrm{d}x=x+C\\
\iff\quad & y=(x+1)(x+C).
\end{aligned}\tag{6}$$

Sijoittamalla saatu ratkaisu (6) tehtävänannon yhtälöön nähdään, että se toteuttaa yhtälön kaikilla x:n arvoilla (siis myös silloin, kun $x=\pm1$). Toisaalta, kun $x=-1$, ratkaisulle pätee $y=(-1+1)(x+C)=0$ riippumatta vakion C arvosta. Siispä jokaisella vakion C arvolla ratkaisu kulkee pisteen $(-1,0)$ kautta.

Toisin sanoen alkuarvotehtävällä on äärettömän monta ratkaisua, kun $x_0 = -1$ ja $y_0 = 0$.

Entä jos $x_0 = -1$, mutta $y_0 \neq 0$? Kun $x_0 = -1$, tehtävänannon differentiaaliyhtälö tulee pisteessä $x = x_0$ muotoon

$$\begin{aligned} &(x_0^2 - 1)y'(x_0) - (x_0 - 1)y(x_0) = (x_0 + 1)^2(x_0 - 1) \\ \iff &((-1)^2 - 1)y'(x_0) - (-1 - 1)y(x_0) = (-1 + 1)^2(-1 - 1) \\ \iff &0 + 2y(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Nähdään, että yhtälö voi päteä pisteessä $x = -1$ vain, jos $y(x_0) = 0$. Jos siis $x_0 = -1$ ja $y_0 \neq 0$, alkuarvotehtävällä ei ole ratkaisua.

Jäljellä ovat ne pisteet, joissa $x_0 = 1$. Yllä nähtiin, että (6) on tehtävänannon yhtälön ratkaisu kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Vaikka OY-lauseen ehdot eivät toteudu, kun $x_0 = 1$, voidaan silti osoittaa, että ratkaisu (6) on yksikäsitteinen myös tässä tapauksessa. Todistus on seuraavanlainen.

Olkoot y_1 ja y_2 kaksi alkuarvotehtävän ratkaisua jollakin välillä I, joka sisältää pisteen $x = 1$ mutta ei pistettä $x = -1$. Edellä on jo näytetty, että osavälillä $I_+ = \{x \in I \mid x > 1\}$ differentiaaliyhtälön ratkaisut ovat muotoa (6), joten tuolla välillä voidaan kirjoittaa $y_1 = (x + 1)(x + C_1)$ ja $y_2 = (x + 1)(x + C_2)$ joillakin vakioilla C_1 ja C_2. Tarkastellaan erotusta $z = y_1 - y_2$. Koska y_1 ja y_2 ovat alkuarvotehtävän ratkaisuja jossain pisteessä $(1, y_0)$, ne ovat jatkuvia (jopa jatkuvasti derivoituvia) funktioita, joille pätee $y_1(1) = y_2(1) = y_0$. Siispä erotus z on jatkuva funktio, jolle pätee $z(1) = 0$. Jatkuvuudesta seuraa, että

$$0 = z(1) = \lim_{x\to 1} z(x) = \lim_{x\to 1} \big(y_1(x) - y_2(x)\big) = \lim_{x\to 1} (x + 1)(C_1 - C_2) = 2(C_1 - C_2).$$

Nähdään, että $C_1 - C_2 = 0$, joten y_1 ja y_2 yhtyvät välillä I_+. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että kyseiset funktiot yhtyvät myös välillä $I_- = \{x \in I \mid x < 1\}$. Koska lisäksi $y_1(1) = y_2(1)$, kyseessä ovat tosiaankin sama funktio. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis yksikäsitteinen.

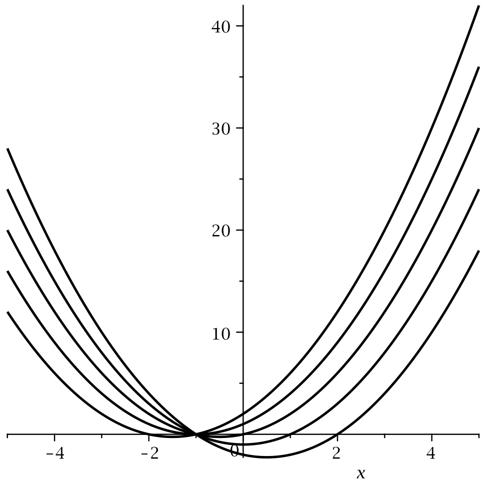
Kootaan vielä saadut tulokset yhteen:

a) Alkuarvotehtävällä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun $x_0 \neq -1$.
b) Alkuarvotehtävällä ei ole yhtään ratkaisua, kun $x_0 = -1$ ja $y_0 \neq 0$.
c) Alkuarvotehtävällä on ääretön määrä ratkaisuja, kun $x_0 = -1$ ja $y_0 = 0$.

Arvostelu. Tämä tehtävä oli tarkoituksella vaikea, mutta tehtävätyyppi oli esiintynyt laskuharjoituksissa lukuunottamatta tapausta, jossa $x_0 = 1$. Yllättävän moni oli tarkastellut differentiaaliyhtälöä tavallisena yhtälönä muistamatta, että ratkaisujen on oltava funktioita. Lisäksi hyvin harva oli edes yrittänyt käyttää OY-lausetta, vaikka ratkaisujen yksikäsitteisyys näkyy sen avulla helpoiten.

Ratkaisun yksikäsitteisyyden osoittamisesta silloin kun $x_0 \neq \pm 1$ (OY-lauseen avulla tai muuten) sai 3 pistettä. Sen näyttäminen, että alkuarvopisteellä $(-1, 0)$ tulee äärettömän monta ratkaisua, toi toiset 3. Myöskin 3 pistettä sai, kun näytti, että alkuarvotehtävällä ei voi olla ratkaisuja, kun $x_0 = -1$ ja $y_0 \neq 0$. Koska yhtälön ratkaiseminen ei ollut tehtävän pääsisältö, siitä sai vain 1 pisteen. Loput 2 pistettä tuli, jos osasi käsitellä vaativimman tapauksen, jossa $x_0 = 1$.

Tehtävä 5. Kaverisi yrittää suorittaa differentiaaliyhtälöiden kurssia Laineyliopistossa, mutta häneltä on jäänyt muutamia maanantaiaamun luentoja väliin. Lupasit auttaa häntä selittämällä kaiken mitä itse muistat kyseisistä asioista. Valitse jompikumpi alla olevista aiheista ja pelasta ystäväsi pulasta.



Kuva 3. Tehtävän 5 ratkaisufunktion (6) kuvaajia eri vakion C arvoilla.

a) Differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen esimerkiksi Eulerin menetelmän avulla.
b) Toisen kertaluvun lineaarisen homogeeniyhtälön perusjärjestelmä.

Muista, että selität asiaa opiskelutoverillesi, joten pyri mahdollisimman selkeään ja johdonmukaiseen asuun. Esimerkit ovat myös varmasti hyödyllisiä.

Arvostelu. Vastaukset arvosteltiin pääasiassa sen mukaan, sisälsivätkö ne mainintoja tietyistä aiheisiin liittyvistä asioista. Toimivan esimerkin esittämisestä sai 2 pistettä. Lisäksi yleisestä siisteydestä ja koherenssista sai 1–3 lisäpistettä. Vääristä väittämistä puolestaan menetti 1–2 pistettä.

Vaihtoehdossa a) pisteitä sai ainakin seuraavien seikkojen maininnoista:

- Eulerin menetelmä lähtee yhtälön normaalimuodosta, 3 p.
- menetelmä perustuu derivaatan kulmakerrointulkintaan, 3 p.
- tutkittava väli jaetaan osaväleihin ja menetelmää toistetaan, 3 p.
- menetelmää tarvitaan, kun differentiaaliyhtälöä ei osata ratkaista, 2 p.
- osavälien määrä vaikuttaa tuloksen tarkkuuteen, 2 p.
- menetelmää voidaan soveltaa korkeamman kertaluvun yhtälöihin palauttamalla ne ensimmäisen kertaluvun yhtälösysteemeiksi, 2 p.
- on myös muita, parempia menetelmiä kuin Eulerin menetelmä, 2 p.

Vaihtoehdossa b) pisteitä ropisi seuraavista:

- lineaarisen homogeeniyhtälön määritelmä, 3 p.
- perusjärjestelmän määritelmä, 3 p.
- perusjärjestelmän funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia, 3 p.
- vakiokertoimisen homogeeniyhtälön ratkaisumenetelmä, 2 p.
- Wronskin determinantin merkitys perusjärjestelmän kannalta, 2 p.
- kertaluvun pudotus perusjärjestelmän löytämiseksi, jos yksi ratkaisu tunnetaan, 2 p.
- perusjärjestelmän merkitys epähomogeeniyhtälön ratkaisemisessa, 2 p.

Moni oli b)-vaihtoehdossa käsitellyt pelkästään vakiokertoimisia homogeeniyhtälöitä. Tällöin saattoi saada korkeintaan 9 pistettä.