Toisen kertaluvun epähomogeeniyhtälöt

- tarkastellaan 2. kertaluvun yleistä lineaarista yhtälöä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- kun merkitään $L(y) = y'' + py' + qy$, jokaiselle ratkaisulle y pätee $L(y) = r$
- jos r ei ole nollafunktio, ratkaisut eivät ole operaattorin L ytimessä, eivätkä ne muodosta vektoriavaruutta
- olkoon kuitenkin y_p jokin yleisen yhtälön yksittäisratkaisu
- tällöin kaikille ratkaisuille y pätee

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = r - r = 0$$

- erotus $y - y_p$ on siis homogeeniyhtälön ratkaisu
- päätelmä: jos tunnetaan yksi yleisen yhtälön ratkaisu y_p sekä homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu y_h, kaikki yleisen yhtälön ratkaisut ovat muotoa $y = y_h + y_p$

Yksittäisratkaisun löytäminen yritettä käyttämällä

- tarkastellaan vakiokertoimista yhtälöä $y'' + ay' + by = r(x)$
- tarkoituksena on arvata ratkaisun muoto lausekkeen $r(x)$ perusteella ja kokeilla sijoittamalla se yhtälöön
- mitään yleispätevää menetelmää muodon valitsemiseksi ei ole
- joissakin tapauksissa kuitenkin tunnetaan toimivat yritteet:

$$\begin{aligned}
r(x) &= ax^n & &\rightsquigarrow & y_p(x) &= A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0 \\
r(x) &= ae^{kx} & &\rightsquigarrow & y_p(x) &= Ae^{kx} \\
r(x) &= a\sin kx & &\rightsquigarrow & y_p(x) &= A\sin kx + B\cos kx \\
r(x) &= a\cos kx & &\rightsquigarrow & y_p(x) &= A\sin kx + B\cos kx
\end{aligned}$$

- lisäksi jos esim. $r(x) = ae^{kx}\sin mx$, niin

$$y_p(x) = e^{kx}(A\sin mx + B\cos mx) \quad \text{jne.}$$

Esimerkki yritteen käytöstä

- Tarkastellaan vakiokertoimista yhtälöä

$$y'' + y' - 2y = x^2. \tag{1}$$

- Vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu saadaan karakteristisen polynomin avulla; se on $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.
- Koska yhtälön (1) oikea puoli on $r(x) = x^2$, kokeillaan polynomiyritettä $y_p = Ax^2 + Bx + C$.
- Derivaatat ovat $y_p' = 2Ax + B$ ja $y_p'' = 2A$.
- Sijoitetaan yrite ja sen derivaatat yhtälöön (1):

$$\begin{aligned}
& y_p'' + y_p' - 2y_p = x^2 \\
\iff & 2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \\
\iff & -2Ax^2 + (2A - 2B)x + 2A + B - 2C = x^2.
\end{aligned}$$

Esimerkki yritteen käytöstä (jatkuu)

- Kertoimia vertailemalla nähdään, että jotta y_p olisi yhtälön (1) ratkaisu, pitää olla

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1/2 \\ B = -1/2 \\ C = -3/4 \end{cases}$$

- Yksittäisratkaisu on siis $y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.
- Yhtälön (1) yleinen ratkaisu on $y = y_h + y_p$, eli

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Lisähuomioita yritteistä

- jos yhtälön oikea puoli on summa useasta termistä, esim. $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$, voidaan etsiä yksittäisratkaisut $y_{p,1}$ ja $y_{p,2}$ erikseen yhtälöille

$$y'' + ay' + by = r_1(x) \quad \text{ja} \quad y'' + ay' + by = r_2(x)$$

- asetetaan $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$, jolloin lineaarisuudesta seuraa

$$L(y_p) = L(y_{p,1} + y_{p,2}) = L(y_{p,1}) + L(y_{p,2}) = r_1 + r_2 = r$$

- toisinaan sattuu, että yrite y_p on homogeeniyhtälön ratkaisu
- tällöin lisätään yritteeseen kerroin x^k, missä k on riittävän suuri

Esimerkki monimutkaisemmasta yritteestä

- Tarkastellaan vakiokertoimista yhtälöä

$$y'' + 4y' + 4y = x - 1 + 5e^{-2x}. \tag{2}$$

- Karakteristisella polynomilla $r^2 + 4r + 4$ on kaksoisjuuri $r = -2$, joten vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

- Jaetaan epähomogeeniyhtälö (2) kahteen osaan.
- **Osa 1.** Käsitellään polynomitermit samalla kertaa:

$$y'' + 4y' + 4y = x - 1. \tag{3}$$

- Yritteeksi valitaan polynomi $y_{p,1} = Ax + B$.
- Derivaatat ovat $y'_{p,1} = A$ ja $y''_{p,1} = 0$.

Esimerkki monimutkaisemmasta yritteestä (jatkuu)

- Sijoitetaan yhtälöön (3):

$$\begin{aligned} & y''_{p,1} + 4y'_{p,1} + 4y_{p,1} = x - 1 \\ \iff & 0 + 4A + 4(Ax + B) = x - 1 \\ \iff & 4Ax + 4A + 4B = x - 1. \end{aligned}$$

- Jotta $y_{p,1}$ olisi yhtälön (3) ratkaisu, täytyy päteä

$$\begin{cases} 4A &= 1 \\ 4A + 4B &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1/4 \\ B &= -1/2 \end{cases}$$

- Yksittäisratkaisu on siis $y_{p,1} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.
- **Osa 2.** Epähomogeeniyhtälön toinen osa on

$$y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2x}. \tag{4}$$

- Koska e^{-2x} ja xe^{-2x} ovat jo homogeeniyhtälön ratkaisuja, valitaan yritteeksi $y_{p,2} = Ax^2 e^{-2x}$.

Esimerkki monimutkaisemmasta yritteestä (jatkuu)

- Derivaatat ovat $y'_{p,2} = 2Axe^{-2x} - 2Ax^2e^{-2x}$ ja $y''_{p,2} = 2Ae^{-2x} - 8Axe^{-2x} + 4Ax^2e^{-2x}$.
- Sijoitetaan yhtälöön (4):

$$\begin{aligned} & y''_{p,2} + 4y'_{p,2} + 4y_{p,2} = 5e^{-2x} \\ \iff & \dots \\ \iff & 2Ae^{-2x} = 5e^{-2x}. \end{aligned}$$

- Nähdään, että on oltava $A = 5/2$, joten yksittäisratkaisu on $y_{p,2} = \frac{5}{2}x^2e^{-2x}$.
- Yhtälön (2) yleinen ratkaisu on nyt $y = y_h + y_{p,1} + y_{p,2}$, eli

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}x^2 e^{-2x}.$$

Vakioiden variointi

- tarkastellaan yleistä lineaarista yhtälöä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- oletetaan tunnetuksi vastaavan homogeeniyhtälön $y'' + py' + qy = 0$ yleinen ratkaisu $y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
- kokeillaan yksittäisratkaisuksi yritettä

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

missä $c_1(x)$ ja $c_2(x)$ ovat tuntemattomia funktioita (varioituja vakioita)
- laskujen helpottamiseksi tehdään lisäoletus

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

- menetelmä toimii aina, mutta voi johtaa hankaliin integrointeihin

Esimerkki vakioiden varioinnista

- Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \ln x, \quad \text{kun } x > 0. \tag{5}$$

- Oletetaan tunnetuksi vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu $y_h = C_1x^2 + C_2x$ (voidaan aina tarkistaa sijoittamalla).
- Muodostetaan yrite $y_p = c_1(x)x^2 + c_2(x)x$, missä c_1 ja c_2 ovat tuntemattomia funktioita.
- Yritteen ensimmäinen derivaatta on

$$y_p'(x) = c_1(x)'x^2 + 2c_1(x)x + c_2'(x) + c_2(x).$$

- Tehdään yksinkertaistava lisäoletus, että $c_1(x)'x^2 + c_2'(x) = 0$, jolloin $y_p'(x) = 2c_1(x)x + c_2(x)$.
- Toinen derivaatta on tällöin $y_p''(x) = 2c_1'(x) + c_2'(x)$.

Esimerkki vakioiden varioinnista (jatkuu)

- Sijoitetaan yrite derivaattoineen yhtälöön (5):

$$\begin{aligned} & y_p'' - \frac{2}{x}y_p' + \frac{2}{x^2}y_p = \ln x \\ \iff & \dots \\ \iff & 2c_1' + c_2' = \ln x. \end{aligned}$$

- Kun otetaan aiemmin tehty lisäoletus huomioon, ratkaistavana on yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2c_1' & + & c_2' & = & 0 \\ 2c_1' & + & c_2' & = & \ln x \end{cases}$$

- Tämän ratkaisu on $c_1' = \frac{1}{x}\ln x$, $c_2' = -\ln x$.

Esimerkki vakioiden varioinnista (jatkuu)

- Ratkaistaan tuntemattomat funktiot integroimalla (integroimisvakiot voi valita vapaasti):

$$c_2(x) = -\int \ln x \,\mathrm{d}x = -x\ln x + x$$

ja

$$c_1(x) = \int \frac{1}{x}(\ln x)^1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

- Yhtälön (5) yksittäisratkaisu on siis

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - x^2\ln x + x^2.$$

- Yleinen ratkaisu on $y = y_h + y_p$ eli

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - x^2\ln x.$$

(Yksittäisratkaisun termi $-x^2$ yhdistettiin homogeeniyhtälön ratkaisun vastaavaan termiin.)

Mitä kurssilla on opittu, yhtälötyypit

- ensimmäisen kertaluvun yhtälöt
  - separoituvat: $y' = p(x)q(y)$, jaetaan q:lla ja integroidaan
  - lineaariset: $y' + p(x)y = q(x)$, integroiva tekijä
  - eksaktit: $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ + lisäehto, potentiaali
- sijoituksella separoituviksi palautuvat
  - lineaarinen argumentti: $y' = f(ax + by)$, sijoitus $z = ax + by$
  - tasa-asteinen: $y' = f(y/x)$, sijoitus $u = y/x$
  - tasa-asteiseksi palautuva: $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1+c_1}{a_2x+b_2+c_2}\right)$, sijoitus $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$
- toisen kertaluvun lineaariset yhtälöt: $y'' + py' + qy = r$
  - vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt: karakteristinen polynomi
  - yleiset homogeeniyhtälöt: kertaluvun pudotus jos yksi ratkaisu tunnetaan
  - vakiokertoimiset epähomogeeniyhtälöt: yksittäisratkaisu yritteellä
  - yleiset epähomogeeniyhtälöt: yksittäisratkaisu vakioiden varioinnilla

Mitä kurssilla on opittu, teoria

- 1. kertaluvun alkuarvotehtävien OY-lause
  - takaa AAT:n yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon ainakin jollain välillä, jos tietyt ehdot pätevät
  - ehdot annettu yleiselle normaalimuodolle ja erikseen sovitettuina kullekin yhtälötyypille
  - yleisimmin käytetty osoittamaan, että ratkaisut eivät leikkaa (eli saa samoja arvoja samassa kohdassa)
- eksaktisuusehto $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$
- numeerisen ratkaisun perusteet
  - esimerkkinä Eulerin menetelmä
- 2. kertaluvun lineaariyhtälöiden teoria
  - homogeeniyhtälön perusjärjestelmän olemassaolo
  - Wronskin determinantti ja ratkaisujen lineaarinen riippumattomuus
  - epähomogeeniyhtälön yleinen ratkaisu $y = y_h + y_p$, missä y_h on HY:n yleinen ratkaisu ja y_p on EHY:n yksittäisratkaisu