2. kertaluvun lineaaristen yhtälöiden teorian kertausta

- tähän mennessä on tutkittu vain homogeeniyhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, missä p ja q ovat jollakin välillä I määriteltyjä jatkuvia funktioita
- Fakta 1: homogeeniyhtälön ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden (operaattorin $L(y) = y'' + py' + qy$ ydin)
- Fakta 2: homogeeniyhtälöllä on perusjärjestelmä (y_1, y_2): kaikki ratkaisut saadaan lineaarikombinaatioina $C_1y_2 + C_2y_2$
- lineaarialgebran kielellä sanottaisiin, että y_1 ja y_2 *virittävät* ratkaisuavaruuden; sen dimensio on siis korkeintaan 2
- Fakta 3: jos y_1 ja y_2 ovat toisistaan lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, ne muodostavat perusjärjestelmän
- jos funktiot p ja q ovat vakioita, osataan löytää lineaarisesti riippumattomat ratkaisuparit

Esimerkki lineaarisesta riippumattomuudesta

- vektorit v_1 ja v_2 ovat *lineaarisesti riippumattomat*, jos ehdosta $C_1v_1 + C_2v_2 = 0$ seuraa, että $C_1 = C_2 = 0$
- geometrisesti lineaarisesti riippumattomat vektorit "osoittavat eri suuntiin"
- osoitetaan, että $y_1(x) = e^{2x}$ ja $y_2(x) = e^{5x}$ ovat lineaarisesti riippumattomat
  - oletetaan, että $C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ eli $C_1e^{2x} + C_2e^{5x} = 0$ kaikilla x
  - tällöin esim. $C_1e^{2\cdot 0} + C_2e^{5\cdot 0} = 0$, joten $C_1 + C_2 = 0$
  - toisaalta myös $C_1y_1' + C_2y_2' = 0$ eli $2C_1e^{2x} + 5C_2e^{5x} = 0$ kaikilla x
  - tällöin esim. $2C_1e^{2\cdot 0} + 5C_2e^{5\cdot 0} = 0$, joten $2C_1 + 5C_2 = 0$
  - yhtälöparin $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 2C_1+5C_2=0 \end{cases}$ ainoa ratkaisu on $C_1 = C_2 = 0$

Wronskin determinantti

- edellisen esimerkin menetelmä voidaan yleistää
- olkoot y_1 ja y_2 jollain välillä I määriteltyjä jatkuvasti derivoituvia funktioita, ja olkoon $x \in I$
- funktioiden y_1 ja y_2 *Wronskin determinantti* pisteessä x on

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Lause (1)

Olkoot y_1 ja y_2 kaksi jatkuvasti derivoituvaa funktiota välillä I. Jos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$, niin y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

Lause (2)

Olkoot p ja q kaksi välillä I määriteltyä jatkuvaa funktiota, ja olkoot y_1 ja y_2 homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ kaksi ratkaisua välillä I. Jos y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat, niin $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ kaikilla $x_0 \in I$.

Esimerkki Wronskin determinantista (1)

- Tutkitaan funktioita $y_1(x) = x^2$ ja $y_2(x) = \sin x$.
- Näiden derivaatat ovat $y_1'(x) = 2x$ ja $y_2(x) = \cos x$.
- Lasketaan Wronskin determinantti pisteessä x:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \sin x \\ 2x & \cos x \end{vmatrix} = x^2 \cos x - 2x \sin x$$
$$= x(x \cos x - 2 \sin x).$$

- Huomataan, että

$$W(y_1, y_2)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 2 \cdot 1\right) = -\pi.$$

- Koska $W(y_1, y_2)(\pi/2) \neq 0$, lauseen (1) perusteella y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

Esimerkki Wronskin determinantista (2)

- Tutkitaan vielä vakiokertoimisen homogeeniyhtälön ratkaisufunktioita $y_1(x) = e^{r_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{r_2 x}$, kun $r_1 \neq r_2$.
- Wronskin determinantti pisteessä x on

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} &= e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x} - r_1 e^{r_1 x} e^{r_2 x} \\ &= e^{r_1 x} e^{r_2 x}(r_2 - r_1). \end{aligned}$$

- Koska $r_2 - r_1 \neq 0$, Wronskin determinantti on nollasta poikkeava kaikilla x.
- Siis lauseen (1) perusteella y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat perusjärjestelmän.
- Lisäksi tulos on sopusoinnussa lauseen (2) kanssa: koska y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, Wronskin determinantti on aina nollasta poikkeava.

Lauseen (1) todistus

- Oletetaan, että $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollain $x_0 \in I$.
- Oletetaan, että $C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$ joillain $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- Derivoimalla puolittain nähdään, että myös $C_1 y_1' + C_2 y_2' = 0$.
- Sijoittamalla lineaarikombinaatioihin piste x_0 saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

- Yhtälöparilla (3) on triviaaliratkaisu $C_1 = C_2 = 0$.
- Toisaalta yhtälöparin (3) kerroinmatriisin determinantti on $W(y_1, y_2)(x_0)$.
- Oletuksen mukaan tämä kerroindeterminantti ei ole 0, joten yhtälöparin ratkaisu on yksikäsitteinen.
- Täten $C_1 = C_2 = 0$, eli y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.

Lauseen (2) todistus

- Oletetaan, että y_1 ja y_2 ovat kaksi lineaarisesti riippumatonta homogeeniyhtälön ratkaisua.
- Tehdään vastaoletus: $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ jollain $x_0 \in I$.
- Tarkastellaan (tuntemattomien C_1 ja C_2) yhtälöparia

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = z_1 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = z_2 \end{cases} \tag{4}$$

- Yhtälöparin (4) kerroindeterminantti on $W(y_1, y_2)(x_0)$.
- Koska kerroindeterminantti on 0, voidaan z_1 ja z_2 valita niin, että yhtälöparilla (4) ei ole ratkaisua. (Vasemmat puolet ovat nimittäin tällöin toistensa monikertoja.)
- Toisaalta OY-lauseen perusteella AAT:llä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = z_1, \quad y'(x_0) = z_2, \tag{5}$$

on ratkaisu välillä I; merkitään sitä z.

Lauseen (2) todistus (jatkuu)

- Koska y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia, pari (y_1, y_2) on perusjärjestelmä.
- Myös z toteuttaa homogeeniyhtälön, joten $z = C_1 y_1 + C_2 y_2$ joillakin $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
- Koska z toteuttaa AAT:n (5), nähdään, että seuraavat yhtälöt pätevät:

$$\begin{cases} z(x_0) = z_1 \\ z'(x_0) = z_2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = z_1 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = z_2 \end{cases}$$

- Tämä on sama yhtälöpari kuin (4), jolla ei pitänyt olla ratkaisua.
- Saatiin ristiriita, joten $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.

Wronskin determinantin käyttö ratkaisujen tutkimisessa

- Wronskin determinantin avulla voidaan tarkistaa, ovatko ratkaisut y_1 ja y_2 lineaarisesti riippumattomat:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2)(x) \neq 0 \text{ jollakin } x \quad &\Rightarrow \quad y_1 \text{ ja } y_2 \text{ lin. riippumattomat} \\ W(y_1,y_2)(x) = 0 \text{ jollakin } x \quad &\Rightarrow \quad y_1 \text{ ja } y_2 \text{ lin. riippuvat} \end{aligned}$$

- samalla on itse asiassa näytetty, että jos y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, niin

$$W(y_1,y_2)(x) \neq 0 \text{ jollakin } x \iff W(y_1,y_2)(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x$$

- jos siis Wronskin determinantti on eri kuin nolla, ratkaisut muodostavat perusjärjestelmän
- Lisätieto: myös käänteinen tulos pätee, sillä ratkaisuavaruuden dimensio on itse asiassa tasan 2
- jos tällöin (y_1,y_2) on perusjärjestelmä, funktioiden y_1 ja y_2 on oltava lineaarisesti riippumattomat ja Wronskin determinantin täytyy siksi olla nollasta poikkeava

Kertaluvun pudotus

- entä jos homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ kertoimet eivät ole vakioita?
- huonot uutiset: ei yleistä ratkaisumenetelmää
- hyvät uutiset: jos yksi ratkaisu tunnetaan, toinen saadaan *kertaluvun pudotuksella*
- oletetaan, että tunnetaan eräs homogeeniyhtälön ratkaisu y_1
- kokeillaan toiseksi ratkaisuksi tuloa $y_2(x) = u(x)y_1(x)$
- derivaatat ovat $y_2' = u'y_1 + uy_1'$ ja $y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$
- sijoitetaan nämä yhtälön vasemmalle puolelle, muistaen, että y_1 oli homogeeniyhtälön ratkaisu:

$$\begin{aligned} &y_2'' + py_2' + qy_2 \\ &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(u'y_1 + uy_1') + quy_1 \\ &= u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) + u\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{=0} \\ &= u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) \end{aligned}$$

Kertaluvun pudotus (jatkuu)

- on päätelty, että jos y_2 toteuttaa homogeeniyhtälön, täytyy päteä

$$y_1u'' + (2y_1' + py_1)u' = 0$$

- merkitään $u' = v$, jolloin saadaan 1. kertaluvun yhtälö

$$y_1v' + (2y_1' + py_1)v = 0 \tag{6}$$

- yhtälöstä (6) osataan ratkaista v; tämän jälkeen selvitetään u ja lopulta y_2
- osoittautuu, että funktiot y_1 ja y_2 ovat itse asiassa lineaarisesti riippumattomia (todistus luentomonisteessa Wronskin determinantin avulla)
- saadut ratkaisut muodostavat muodostavat siis perusjärjestelmän

Esimerkki kertaluvun pudotuksesta

- Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = 0, \quad \text{kun } x > 0.$$

- Oletetaan tunnetuksi, että yhtälöllä on ratkaisu $y_1(x) = x^2$.
- Kokeillaan toiseksi ratkaisuksi tuloa $y_2(x) = u(x)x^2$, missä u on tuntematon funktio.
- Derivaatat ovat $y_2' = x^2u' + 2xu$ ja $y_2'' = x^2u'' + 4xu' + 2u$.
- Sijoitetaan y_2 derivaattoineen alkuperäiseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} &y_2'' - \frac{2}{x^2} = 0 \\ \iff &x^2u'' + 4xu' + 2u - \frac{2}{x^2}\cdot ux^2 = 0 \\ \iff &x^2u'' + 4xu' + 2u - 2u = 0 \\ \iff &x^2u'' + 4xu' = 0. \end{aligned}$$

Esimerkki kertaluvun pudotuksesta (jatkuu)

- Merkitään viimeisessä yhtälössä $u' = v$, jolloin se tulee muotoon
$$x^2 v' + 4xv = 0 \iff v' = -\frac{4}{x} v.$$
- Uusi yhtälö on separoituva, ja sen (epätriviaali) ratkaisu on $v(x) = C/x^4$.
- Integroimisvakiot voidaan valita vapaasti, koska etsitään vain yhtä y_1:stä poikkeavaa ratkaisua; valitaan tässä $C = -3$.
- Koska $u' = v$, niin
$$u(x) = \int v(x) \, \mathrm{d}x = \int -\frac{3}{x^4} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{x^3}.$$
- Lopulta saadaan $y_2(x) = u(x) y_1(x) = 1/x$.
- Laskemalla Wronskin determinantti voitaisiin vielä tarkistaa, että y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomat.