Toisen kertaluvun lineaariset yhtälöt

- toisen kertaluvun yhtälöt vaikeita
- rajoitutaan tutkimaan vain lineaarisia yhtälöitä:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

- jos $r = 0$, kyseessä on *homogeeniyhtälö*
- teoriassa hyödynnetään lineaarialgebraa

Lause (Lineaarisen 2. kl. DY:n OY-lause)
Olkoon I avoin väli. Oletetaan, että kerroinfunktiot p, q ja r ovat jatkuvia välillä I. Olkoot $x_0 \in I$ ja $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Tällöin AAT:llä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

on koko välillä I ratkaisu $y_M \colon I \to \mathbb{R}$. Kaikki muut I:n osaväleillä määritellyt ratkaisut ovat y_M:n rajoittumia.

Vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt

- tarkastellaan yhtälöä

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{0.2}$$

  missä a ja b ovat vakioita (reaalilukuja)
- tavoitteena on löytää kaksi toisistaan riippumatonta ratkaisua y_1 ja y_2
- kaikki ratkaisut saadaan tällöin y_1:n ja y_2:n lineaarikombinaatioina $C_1y_1 + C_2y_2$, missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- yhtälön *karakteristinen polynomi* on

$$\chi(r) = r^2 + ar + b$$

- ratkaisut määräytyvät karakteristisen polynomin juurista

Vakiokertoimisen homogeeniyhtälön ratkaisu

- tarkastellaan yhtälöä $y'' + ay' + by = 0$
- olkoot r_1 ja r_2 karakteristisen polynomin $r^2 + ar + b$ juuret
- **Tapaus 1:** Jos r_1 ja r_2 ovat reaalisia ja $r_1 \neq r_2$, niin yhtälöllä on ratkaisut

$$y_1(x) = e^{r_1x} \quad \text{ja} \quad y_2(x) = e^{r_2x}.$$

- **Tapaus 2:** Jos $r_1 = r + si$ on (aidosti) kompleksinen, niin $r_2 = r - si$, ja yhtälöllä on ratkaisut

$$y_1(x) = e^{rx}\sin sx \quad \text{ja} \quad y_2(x) = e^{rx}\cos sx.$$

- **Tapaus 3:** Jos $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$, niin yhtälöllä on ratkaisut

$$y_1(x) = e^{rx} \quad \text{ja} \quad y_2(x) = xe^{rx}.$$

- ratkaisuparien riippumattomuudet selvitetään myöhemmin
- yleinen ratkaisu on $y = C_1y_1 + C_2y_2$

Esimerkkejä vakiokertoimista homogeeniyhtälöistä

- Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' - y - 2 = 0.$$

- Karakteristinen polynomi on $r^2 - r - 2$, jonka juuret ovat $r_1 = 2$ ja $r_2 = -1$.
- Yhtälöllä on siis ratkaisut $y_1 = e^{2x}$ ja $y_2 = e^{-x}$.
- Yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.
- Katsotaan sitten yhtälöä

$$y'' - 4y' + 5 = 0.$$

- Karakteristinen polynomi on $r^2 - 4r + 13$, jonka juuret ovat ratkaisukaavan mukaan $r_1 = 2 + 3i$ ja $r_2 = 2 - 3i$.
- Juurissa reaaliosa on 2 ja imaginaariosa ± 3.
- Yhtälöllä on ratkaisut $y_1 = e^{2x}\sin 3x$ ja $y_2 = e^{2x}\cos 3x$.
- Yleinen ratkaisu on $y(x) = C_1e^{2x}\sin 3x + C_2e^{2x}\cos 3x$.

Superpositioperiaate

- miksi ollaan niin kiinnostuneita lineaarikombinaatiosta
$$C_1y_1 + C_2y_2?$$
- kuten 1. kertaluvun yhtälöillä, differentiaalioperaattori
$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$$
on lineaarinen
- homogeeniyhtälön $L(y) = 0$ ratkaisujoukko on operaattorin L ydin, siis vektoriavaruus
- seuraus: jos y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, myös $C_1y_1 + C_2y_2$ on ratkaisu kaikilla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- asian toinen puoli: saadaanko kaikki ratkaisut lineaarikombinaatioina?

Perusjärjestelmä

- tarkastellaan edelleen homogeeniyhtälöä
$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \tag{0.3}$$
- olkoot y_1 ja y_2 sellaiset funktiot, että jokainen homogeeniyhtälön ratkaisu (jollain välillä) on muotoa $C_1y_2 + C_2y_2$, missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- tällöin funktioparia (y_1, y_2) nimitetään homogeeniyhtälön *perusjärjestelmäksi*

Lause

Olkoon I avoin väli, ja olkoot p ja q välillä I määriteltyjä jatkuvia funktioita. Tällöin homogeeniyhtälöllä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ on perusjärjestelmä välillä I.

Vakiokertoimisen homogeeniyhtälön perusjärjestelmät

- aiemmin näytettiin, miten karakteristisen polynomin avulla saadaan kaikissa tapauksissa kaksi vakiokertoimisen homogeeniyhtälön ratkaisua y_1 ja y_2
- nämä ratkaisut muodostavat kussakin tapauksessa homogeeniyhtälön perusjärjestelmän
- Todistus (lineaarialgebralla):
  - Lauseen perusteella tiedetään, että jokin perusjärjestelmä (z_1, z_2) on olemassa.
  - Tämä tarkoittaa sitä, että z_1 ja z_2 virittävät ratkaisuavaruuden, joten kyseisen avaruuden dimensio on (korkeintaan) 2.
  - Kussakin ratkaisumenetelmän tapauksessa y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippumattomia (todistetaan myöhemmin).
  - Koska y_1 ja y_2 muodostavat kahden vektorin vapaan jonon korkeintaan kaksiulotteisessa ratkaisuavaruudessa, ne virittävät koko avaruuden.
  - Tämä tarkoittaa, että (y_1, y_2) on perusjärjestelmä.

Lisätieto: mistä tulevat kaavoihin sini ja kosini?

- Funktio $y = e^{r_1x}$ toteuttaa yhtälön $y'' + ay' + by = 0$, jos r_1 on karakteristisen polynomin juuri.
- Tämä ei oikeastaan riipu siitä, onko r_1 reaalinen vai ei.
- Jos $r_1 = r + si$ on kompleksinen ja ratkaisuksi hyväksytään kompleksifunktiot, saadaan kaksi ratkaisua:
$$y_1(x) = e^{(r+si)x} \quad \text{ja} \quad y_2(x) = e^{(r-si)x}.$$
- Kaikki lineaarikombinaatiot ovat myös ratkaisuja, ja eräs näistä on (Eulerin kaavan mukaan)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{(r+si)x} + \frac{1}{2}e^{(r-si)x} &= \frac{1}{2}e^{rx}e^{sxi} + \frac{1}{2}e^{rx}e^{-sxi}\\ &= e^{rx}\left(\frac{e^{sxi} + e^{-sxi}}{2}\right) = e^{rx}\cos x.\end{aligned}$$
- Sinifunktio saadaan (kompleksisesta) lineaarikombinaatiosta
$$\frac{1}{2i}e^{(r+si)x} - \frac{1}{2i}e^{(r-si)x}.$$