Muunnokset

- tähän mennessä on opittu ratkaisemaan 1. kertaluvun separoituvia, lineaarisia sekä eksakteja yhtälöitä
- muut yhtälöt voidaan toisinaan muuntaa sellaisiksi, joita kyetään ratkaisemaan
- esimerkkinä kertominen integroivalla tekijällä
- tärkein muunnoskeino on kuitenkin *sijoitus*
- esimerkiksi $y'' + y' = x$ muuttuu sijoituksella $z = y'$ ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi $z' + z = x$
- tarkastellaan muutamia klassisia yhtälötyyppiä, jotka palautuvat sijoituksella tutuiksi tapauksiksi

Lineaarinen argumentti

- tarkastellaan yhtälöä

$$y' = f(ax + by),$$

missä a ja b ovat vakioita $(b \neq 0)$

- tehdään sijoitus $z = ax + by$, jolloin $z' = a + by'$
- yhtälö tulee separoituvaan muotoon

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \iff z' = bf(z) + a$$

- uusi muoto on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa
- OY-lauseen ehtojen pätevyysalue kuitenkin muuttuu

Esimerkki yhtälöstä, jolla lineaarinen argumentti

- Tarkastellaan yhtälöä

$$y' = \sqrt{x + 2y}.$$

- Tehdään sijoitus $z = x + 2y$, jolloin $z' = 1 + 2y'$ ja $y' = (z' - 1)/2$, ja yhtälö tulee muotoon

$$\frac{z' - 1}{2} = \sqrt{z} \iff z' = 2\sqrt{z} + 1.$$

- Saatu yhtälö on separoituva, ja se voidaan integroida sijoituksella $u = \sqrt{z}$.
- Implisiittimuotoinen ratkaisu on

$$\sqrt{z} - \ln(2\sqrt{z} + 1) - x = C,$$

josta alkuperäisen yhtälön (implisiitti)ratkaisuksi saadaan

$$\sqrt{x + 2y} - \ln(2\sqrt{x + 2y} + 1) - x = C.$$

Tasa-asteinen yhtälö

- tarkastellaan ns. *tasa-asteista* (engl. *homogeneous*) yhtälöä

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- tehdään sijoitus $u = y/x$, jolloin $y = ux$ ja $y' = u + u'x$
- yhtälö tulee separoituvaan muotoon

$$u + u'x = f(u) \iff u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

- uusi muoto on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa

Esimerkki tasa-asteisesta yhtälöstä

- Tarkastellaan yhtälöä
$$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{y/x}{1+(y/x)^2}.$$
- Yhtälö on tasa-asteinen: oikea puoli on muotoa $f(y/x)$.
- Tehdään sijoitus $u = y/x$, jolloin $y = ux$ ja $y' = u'x + u$, ja yhtälö tulee muotoon
$$u'x + u = \frac{u}{1+u^2} \iff u' = -\frac{u^3}{x(1+u^2)}.$$
- Uusi yhtälö on separoituva ja integroituu helposti.
- Ratkaisuksi saadaan
$$-\frac{1}{2u^2} + \ln|xu| = C,$$
jolloin alkuperäisen yhtälön ratkaisu on
$$-\frac{x^2}{2y^2} + \ln|y| = C.$$

Tasa-asteiseksi palautuva yhtälö

- tarkastellaan yhtälöä
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$
- idea: yritetään eroon vakioista c_1 ja c_2, jolloin yhtälöstä tulee tasa-asteinen
- tehdään kaksoissijoitus parametreilla α ja β:
$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y(x) = z(t) + \beta \quad = z(x-\alpha) + \beta \end{cases}$$
- tällöin $y'(x) = z'(x-\alpha) = z'(t)$, ja kaikilla $i \in \{1,2\}$ saadaan
$$\begin{aligned} a_ix + b_iy + c_i &= a_i(t+\alpha) + b_i(z+\beta) + c_i \\ &= a_it + b_iz + (a_i\alpha + b_i\beta + c_i) \end{aligned}$$

Tasa-asteiseksi palautuva yhtälö (jatkuu)

- tähän mennessä yhtälö on saatu muotoon
$$z' = f\left(\frac{a_1t + b_1z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2t + b_2z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right)$$
- yritetään valita α ja β niin, että $a_i\alpha + b_i\beta + c_i = 0$ kaikilla i
- ratkaistavana yhtälöpari, jolla yksikäsitteinen ratkaisu, mikäli $\left|\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right| = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
- jos α ja β saadaan valittua, yhtälöstä tulee tasa-asteinen:
$$z' = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \cdot z/t}{a_2 + b_2 \cdot z/t}\right) = g\left(\frac{z}{t}\right)$$
- jos determinantti on nolla, yhtälö palautuu tapaukseen $y' = g(ax + by)$

Esimerkki tasa-asteiseksi palautuvasta yhtälöstä

- Tarkastellaan yhtälöä
$$y' = \frac{2x + y + 5}{x - y + 2}.$$
- Tehdään sijoitus $x = t + \alpha$, $y(x) = z(t) + \beta$, jolloin $y'(x) = z'(t)$, ja yhtälö tulee muotoon
$$z' = \frac{2t + z + (2\alpha + \beta + 5)}{t - z + (\alpha - \beta + 2)}.$$
- Koska vakiotermit halutaan hävittää, saadaan ratkaistavaksi yhtälöpari
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 5 = 0 \\ \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases}$$
jonka ratkaisu on $\alpha = -7/3$, $\beta = -1/3$.
- Näillä valinnoilla yhtälöstä tulee tasa-asteinen:
$$z' = \frac{2t + z}{t - z} = \frac{2 + z/t}{1 - z/t}.$$

Numeerinen ratkaiseminen

- aina ei pystytä ratkaisemaan yhtälöä tunnetuilla menetelmillä
- voi myös olla että yhtälössä esiintyvät tunnetut funktiot (tai koko yhtälö!) tunnetaan vain mittaustuloksista
- numeeriset menetelmät perustuvat kuvaajan approksimointiin derivaatan avulla
- numeerisia menetelmiä on lukuisia, eri käyttötarkoituksiin viriteltyjä
- yksinkertaisin on Eulerin menetelmä, tunnetuin ehkä Rungen–Kutan menetelmä
- numeerisilla menetelmillä voidaan ratkaista normaalimuotoisia 1. kertaluvun yhtälöitä ja yhtälöryhmiä; korkeamman kertaluvun yhtälöt palautetaan 1. kertaluvun yhtälöryhmiksi

Eulerin menetelmä

- ratkaistavana 1. kertaluvun normaalimuotoinen alkuarvotehtävä

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

- approksimoidaan ratkaisua jollakin välillä $[x_0, \bar{x}]$ (halutaan esimerkiksi arvioida lukua $y(\bar{x})$)
- jaetaan väli $[x_0, \bar{x}]$ osaväleihin $[x_i, x_{i+1}]$, $x_0 < \cdots < x_n = \bar{x}$
- yhtälön normaalimuoto $y' = f(x, y)$ kertoo, mikä on ratkaisun kuvaajan pisteeseen $(x, y(x))$ piirretyn tangentin kulmakerroin
- suoritetaan seuraavat askeleet jokaisella i (lähtien arvosta $i = 0$)
  1. lasketaan derivaatta $k_i = y'(x_i) = f(x_i, y_i)$
  2. approksimoidaan kuvaajaa suoralla $y = k_i x$ ja lasketaan uusi arvo $y_{i+1} = k(x - x_i) + y_i$

Esimerkki Eulerin menetelmästä

- Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = \frac{y}{x} - 2x^2, \quad y(1) = 0.$$

- Tutkitaan Eulerin menetelmän avulla, mitä on $y(2)$.
- Jaetaan väli $[1, 2]$ tasaisesti esim. 10 väliin:

$$x_0 = 0, \quad x_n = 2, \quad x_i = 1 + \frac{i}{10}.$$

- Approksimointi aloitetaan alkuarvopisteestä $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

  1. $k_0 = f(1, 0) = 0/1 - 2 \cdot 1^3 = -2$
  2. $x_1 = 1 + 1/10 = 1{,}1,$
     $y_1 = y_0 + k_0(x_1 - x_0) = 0 - 2 \cdot 1/10 = -0{,}2.$

- Jatko kannattaa suorittaa tietokoneella (saatavilla erillisessä tiedostossa); lopputulokseksi saadaan $y(2) \approx -5{,}43$.
- AAT:n tarkka ratkaisu on $y = x - x^3$. Oikea arvo on siis $y(2) = -6$ ja virhe 0,57.

Eulerin menetelmä (jatkuu)

- Eulerin menetelmä on yksinkertaisin ns. 1. kertaluvun menetelmä
- "1. kertaluku" tarkoittaa, että virhe on suorassa suhteessa osavälin (maksimi)pituuteen
- heikkous on siinä, että kullakin osavälillä suoran kulmakerroin lasketaan vain derivaatan arvosta yhdessä pisteessä
- esim. klassinen Runge–Kutta on 4. kertaluvun menetelmä
- siinä kulmakerroin lasketaan derivaatan arvoista osavälin alku- ja päätepisteessä sekä puolivälissä
- klassisen Runge–Kutan virhe on suhteessa osavälin pituuden neljänteen potenssiin