Miksi differentiaaliyhtälöitä?

- lukemattomia sovelluksia:
  - Malthusin populaatiokasvu: $N'(t) = kN(t)$
  - Verhulstin populaatiokasvu: $N'(t) = N(t)(1 - N(t))$
  - Hooken laki harmoniselle liikkeelle: $m\ddot{x} = -kx$
  - Vidalen–Wolfen mainostusmalli: $S'(t) = rAM - (1/M + \lambda)S(t)$
  - Lotkan–Volterran saalistusmalli:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} = -y(\gamma - \delta x) \end{cases}$$

- lisää esimerkkejä saadaan *osittaisdifferentiaaliyhtälöistä*: Maxwellin yhtälöt, aaltoyhtälö, Black–Scholes...
- yhtälöt ovat yleiskäyttöisiä, esimerkiksi Malthusin kasvuyhtälö kuvaa myös radioaktiivista hajoamista
- moni matematiikan haara on syntynyt tarpeesta ratkaista differentiaaliyhtälöitä: Lien ryhmät, Fourier-analyysi, ...

Eksaktit differentiaaliyhtälöt

- 1. kertaluvun DY on *eksakti* alueessa $D \in \mathbb{R}^2$, jos se on muotoa

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{0.1}$$

ja on olemassa kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio $F \colon D \to \mathbb{R}$, ns. *potentiaali*, jolle pätee kaikilla $(x, y) \in D$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

- eksaktisuuden hyöty: jos y on derivoituva funktio, niin

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y(x)) = M(x, y) + N(x, y)y'$$

- siispä yhtälö (0.1) pätee, jos ja vain jos $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y) = 0$ eli $F(x, y) = C$ jollain $C \in \mathbb{R}$
- eksaktin yhtälön ratkaisemiseksi on siis löydettävä potentiaali

Esimerkki eksaktista yhtälöstä

- Tarkastellaan yhtälöä

$$2xy + (x^2 + y)y' = 0$$

ja merkitään $M(x, y) = 2xy$ ja $N(x, y) = x^2 + y$.

- Tällä yhtälöllä on potentiaali $F(x, y) = x^2y + \frac{1}{2}y^2$, sillä

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy = M \quad \text{ja} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y = N.$$

Yhtälön implisiittiratkaisu on siis

$$x^2y + \frac{1}{2}y^2 = C,$$

missä C on jokin mielivaltainen vakio.

- Implisiittiratkaisusta voitaisiin vielä ratkaista y.

Hieman vektorianalyysia

- derivoitaessa F käytettiin usean muuttujan ketjusääntöä
- tuttu vektorianalyysista: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) = \nabla F \cdot \gamma'(t)$
- kuvitellaan, että funktion arvo $F(x, y)$ ilmaisee maaston korkeuden pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- tällöin osittaisderivaatta $\partial F/\partial x$ (tai $\partial F/\partial y$) kertoo maaston nousukulman x-suunnassa (vastaavasti y-suunnassa)
- kuvitellaan lisäksi, että funktiot γ_1 ja γ_2 ilmaisevat kulkijan x- ja y-koordinaatit ajan funktioina
- kulkijan korkeus ajanhetkellä t_0 on $F(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$
- mikä on kulkijan nousunopeus $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$ ajanhetkellä t_0?

Hieman vektorianalyysia, kulkijan nousunopeus

- lasketaan yhteen x- ja y-suuntaiset nousunopeudet
- esimerkiksi x-suuntainen nousunopeus on *maaston nousukulma x-suunnassa* kerrottuna *kulkijan x-suuntaisella nopeudella*
- yhteensä saadaan ketjusääntö:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \cdot \gamma_1'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \cdot \gamma_2'(t_0)$$

- eksaktin yhtälön tapauksessa

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y(x)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) \\ &= M(x, y) + N(x, y)y'\end{aligned}$$

Eksaktisuuslause

- eksaktisuus voidaan todeta jo funktioista M ja N, vaikkei potentiaalia tunneta

Lause

Olkoot M ja N jatkuvasti derivoituvia funktioita suorakaiteen muotoisessa, reiättömässä alueessa $R \subset \mathbb{R}^2$. Tällöin yhtälö $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ on eksakti alueessa R, jos ja vain jos kaikilla $(x, y) \in R$ pätee

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y).$$

- todistuksen toinen suunta ("vain jos") on suoraviivainen tarkistus
- toinen suunta eli potentiaalin etsiminen antaa yhtälön ratkaisumenetelmän

Ratkaisumenetelmä

- tarkistetaan eksaktisuus kriteerillä $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ (jossain suorakaiteessa)
- koska $\partial F/\partial x = M$, potentiaali saadaan integroimalla:

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,\mathrm{d}x + g(y) \tag{0.3}$$

- $g(y)$ on "integroimisvakio"; se saattaa riippua y:stä, koska integroitiin vain x:n suhteen
- jotta saadaan $g(y)$ selville, derivoidaan $F(x, y)$:n lauseke (0.3) y:n suhteen ja verrataan lausekkeeseen $N(x, y)$
- implisiittiratkaisu on $F(x, y) = C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio
- lopuksi voidaan ratkaista y, jos mahdollista
- voidaan myös etsiä potentiaali integroimalla ensin N, jos helpompi laskea

Esimerkki eksaktin yhtälön ratkaisusta

- Tarkastellaan yhtälöä

$$y\cos x + y^2e^x(1 + x) + \sin x + (\sin x + 2xye^x)y' = 0,$$

jossa merkitään $M(x, y) = y\cos x + y^2e^x(1 + x) + \sin x$ ja $N(x, y) = \sin x + 2xye^x$.

- Tarkistetaan eksaktisuuskriteeri:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2ye^x(1 + x),$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2ye^x + 2xye^x.$$

- Nähdään, että $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, joten yhtälö on eksakti (koko tasossa $\mathbb{R}^2$).
- Integroidaan N muuttujan y suhteen, jotta löydetään F.

Esimerkki eksaktin yhtälön ratkaisusta (jatkuu)

- Integroimalla y:n suhteen saadaan

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int \sin x + 2xye^x\,\mathrm{d}y$$
$$= y\sin x + xy^2e^x + h(x),$$

  missä $h(x)$ on jokin x:n lauseke ("integroimisvakio").
- Etsitään h käyttämällä ehtoa $\partial F/\partial x = M$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\cos x + y^2e^x + xy^2e^x + h'(x).$$

- Jotta pätisi $\partial F/\partial x = M$, täytyy olla $h'(x) = \sin x$, joten $h(x) = -\cos x$.
- Ratkaisu on $F(x,y) = C$, eli

$$y\sin x + xy^2e^x - \cos x = C.$$

- Tästä voisi vielä ratkaista y:n.

Integroiva tekijä

- toisinaan yhtälö ei ole eksakti, mutta se saadaan eksaktiksi kertomalla se puolittain jollakin funktiolla μ
- funktiota μ kutsutaan *integroivaksi tekijäksi*
- tarkastellaan esim. yhtälöä $x + 3x^3\sin y + (x^4\cos y)y' = 0$
  - $M = x + 3x^3\sin y$, $N = x^4\cos y$
  - $\partial M/\partial y = 3x^3\cos y$, $\partial N/\partial x = 4x^3\cos y$
- $\Rightarrow$ yhtälö ei ole eksakti (missään alueessa)
- kerrotaan funktiolla $\mu(x) = 1/x$
- saadaan $1 + 3x^2\sin y + (x^3\cos y)y' = 0$
  - nyt $\widetilde{M} = 1 + 3x^2\sin y$, $\widetilde{N} = x^3\cos y$
  - $\partial\widetilde{M}/\partial y = 3x^2\cos y$, $\partial\widetilde{N}/\partial x = 3x^2\cos y$
- $\Rightarrow$ uusi yhtälö on eksakti koko $\mathbb{R}^2$:ssa!