Kertausta, DY:n määritelmä

- (tavalliseksi) kertaluvun n differentiaaliyhtälöksi nimitetään yhtälöä, joka on yhtäpitävä yhtälön

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}) = 0$$

kanssa, missä
  a) F on jokin $n + 2$ muuttujan reaaliarvoinen funktio
  b) y on yhden muuttujan n kertaa jatkuvasti derivoituva funktio
- differentiaaliyhtälö on normaalimuodossa, jos se on muotoa

$$y^{(n)} = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)),$$

missä f on jokin $n + 1$ muuttujan reaaliarvoinen funktio
- tarkoituksena on ratkaista y jollain välillä I, jolla y on n kertaa jatkuvasti derivoituva

Esimerkki differentiaaliyhtälöstä

- Funktiosta

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 - x_1 \sin x_3 + \sqrt{x_2}$$

saadaan sijoittamalla $x_1 = x$, $x_2 = y(x)$, $x_3 = y'(x)$ ja $x_4 = y''(x)$ differentiaaliyhtälö

$$y''(x) - x \sin y'(x) + \sqrt{y(x)} = 0.$$

- Tämän normaalimuoto on

$$y''(x) = x \sin y'(x) - \sqrt{y(x)},$$

jonka oikea puoli saadaan puolestaan funktiosta

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sin x_3 - \sqrt{x_2}.$$

Kertausta, OY-lause

- tarkastellaan normaalimuodossa olevaa 1. kertaluvun alkuarvotehtävää

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \qquad (\heartsuit)$$

- jos funktio $(x, y) \mapsto f(x, y)$ on jatkuva ja sen toinen (y:n suhteen laskettu) osittaisderivaatta on myös jatkuva jossain alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$, joka sisältää pisteen (x_0, y_0), niin
  a) AAT:llä ($\heartsuit$) on ratkaisu jollain välillä, joka sisältää pisteen x_0
  b) tämä ratkaisu on yksikäsitteinen (määrittelyvälillään)

Kertausta, separoituvat yhtälöt

- 1. kertaluvun normaalimuotoinen yhtälö $y'(x) = f(x, y(x))$ on separoituva, jos oikea puoli on muotoa

$$f(x, y) = p(x)q(y)$$

- funktion q nollakohdasta y_0 saadaan triviaaliratkaisu: $y(x) = y_0$ kaikilla x
- jos funktio p on jatkuva ja q on jatkuvasti derivoituva, OY-lauseen ehdot pätevät
- jos OY-lauseen ehdot pätevät ja y ei ole triviaaliratkaisu, niin $q(y(x)) \neq 0$ kaikilla x
- ratkaistaessa integroidaan puolittain:

$$\int \frac{y'(x)}{q(y(x))} \, \mathrm{d}x = \int p(x) \, \mathrm{d}x + C$$

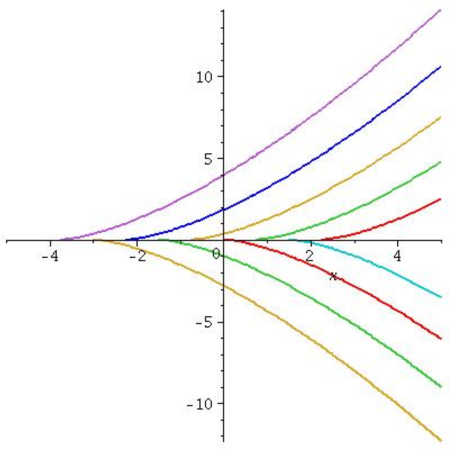
Esimerkki separoituvasta yhtälöstä

- Tarkastellaan separoituvaa yhtälöä
$$y' = \sqrt[3]{y}.$$
Tässä $p(x) = 1$ ja $q(y) = \sqrt[3]{y}$.
- Nähdään, että q ei ole derivoituva, kun $y = 0$, joten OY-lause pätee vain alueissa, joissa $y > 0$ tai $y < 0$.
- Triviaaliratkaisu: $y = 0$.
- Koska OY-lause ei päde triviaaliratkaisun ympäristössä, ei voida olettaa, että $q(y(x))$ ei saisi koskaan arvoa 0.
- Kuitenkin, mikäli etsitään triv.ratkaisusta poikkeavia ratkaisuja, voidaan olettaa, että $y(x) \neq 0$ jollakin x, ja koska y on jatkuva, itse asiassa $y(x) \neq 0$ jollain välillä I. Samalla välillä myös $q(y(x)) \neq 0$.

Esimerkki separoituvasta yhtälöstä (jatkuu)

- Integrointi (välillä I) tuottaa
$$\begin{aligned} &\int \frac{y'}{\sqrt[3]{y}}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x \\ \iff\ &\frac{3}{2}y^{2/3} = x + C_1 \\ \iff\ &y(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}x + C\right)^3}. \end{aligned}$$
- Eri C:n arvoilla saadaan eri ratkaisuja. Oheisessa kuvassa on piirretty muutamia.
- Kukin ratkaisu on määritelty ja positiivinen (ja toteuttaa yhtälön), kun $x > -3C/2$.
- Emme tiedä, miten ratkaisut käyttäytyvät, kun $x < -3C/2$, koska tällöin y voi olla 0.
- Voidaan kuitenkin osoittaa, että tällöin ratkaisut yhtyvät triviaaliratkaisuun. Yksikäsitteisyys ei siis todellakaan päde!

Esimerkki separoituvasta yhtälöstä (jatkuu)



1. kertaluvun lineaariset yhtälöt

- ensimmäisen kertaluvun yhtälö on *lineaarinen*, jos se on muotoa
$$y' + p(x)y = q(x),$$
missä funktiot p ja q ovat jatkuvia jollakin välillä I
- jos $q = 0$, yhtälö on *homogeeninen*
- OY-lauseen ehdot toteutuvat automaattisesti alueessa $I \times \mathbb{R}$
- ratkaisu siis löytyy välillä I (millä tahansa alkuarvoilla)

1. kl. lin. yhtälön ratkaiseminen, integroiva tekijä

- idea: käytetään *integroivaa tekijää*, jotta saadaan yhtälön vasen puoli "täydennettyä derivaataksi"
- ts. etsitään jokin funktio μ (integroiva tekijä), jolle pätee

$$\begin{aligned} \mu(x)(y' + p(x)y) &= D(\mu(x)y) \\ \text{eli} \quad \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y &= \mu(x)y' + \mu'(x)y \end{aligned}$$

- nähdään, että μ:n halutaan toteuttavan yhtälön $\mu'(x) = \mu(x)p(x)$
- tämä yhtälö on separoituva, ja sen eräs ratkaisu on

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

- $\mu(x)$ on määritelty, kun p on jatkuva (eli välillä I), eikä μ saa koskaan arvoa 0

1. kl. lin. yhtälön ratkaiseminen, lopullinen ratkaisu

- kerrotaan yhtälön molemmat puolet integroivalla tekijällä ja integroidaan:

$$\begin{aligned} & y' + p(x)y = q(x) \\ \iff & \mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \\ \iff & D(\mu(x)y)) = \mu(x)q(x) \\ \iff & \mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x + C \\ \iff & y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,\mathrm{d}x + C\right). \end{aligned}$$

- ratkaisu on voimassa, kun $\mu(x)$ on määritelty, $\mu(x) \neq 0$ ja q on jatkuva; huomataan, että nämä ehdot pätevät koko välillä I

Esimerkki 1. kl. lin. yhtälöstä

- Ratkaistaan AAT $y' - y/x = 2x$, $y(1) = 0$.
- Tässä $p(x) = -1/x$ ja $q(x) = 2x$. Koska p ei ole määritelty nollassa, on rajoituttava joko välille $(-\infty, 0)$ tai $(0, \infty)$.
- Alkuarvoehdon vuoksi valitaan $(0, \infty)$.
- Integroiva tekijä on

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

- Kertomalla yhtälö integroivalla tekijällä saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 2 \\ \iff & D\left(\frac{1}{x}y\right) = 2 \\ \iff & \frac{1}{x}y = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + C \\ \iff & y = 2x^2 + Cx. \end{aligned}$$

Esimerkki 1. kl. lin. yhtälöstä (jatkuu)

- Ratkaistaan vielä alkuarvoehdon perusteella C:

$$y(1) = 2 \cdot 1^2 + C \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

- Lopullinen ratkaisu on siis

$$y(x) = 2x^2 - 2x.$$

- Huom! Vaikka ratkaisufunktio on määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ratkaisuväli on kuitenkin $(0, \infty)$. Tämä johtuu siitä, että yhtälö ei ole edes määritelty, kun $x = 0$, joten sillä ei voi olla kyseisessä kohdassa ratkaisuakaan.

Lineaarisuus, homogeeniyhtälöt

- kuvaus
$$L\colon C^1(I) \to C^0(I), \quad L(y) = y' + py,$$
on *lineaarinen differentiaalioperaattori* (huom. $p \in C^0(I)$)
- lineaarisuus tarkoittaa sitä, että
$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$L(ay) = aL(y), \quad a \in \mathbb{R}$$
- lineaarialgebrasta tiedetään, että homogeeniyhtälön $L(y) = 0$ ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden, nimittäin operaattorin L *ytimen*
- seuraus: jos y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön ratkaisuja, niin koska ratkaisut muodostavat vektoriavaruuden, myös lineaarikombinaatio $ay_1 + by_2$ on myös ratkaisu kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ (lause 1.10)

Lineaarisuus, epähomogeeniyhtälöt

- epähomogeeniyhtälön $L(y) = q$ ratkaisut muodostavat *affiinin aliavaruuden*
- jos tunnetaan yksikin epähomogeeniyhtälön ratkaisu y_p, kaikki ratkaisut saadaan kaavasta
$$y = Cy_h + y_p,$$
missä y_h on jokin homogeeniyhtälön ratkaisu ja C mikä tahansa reaaliluku (lause 1.11)
- todistus: $L(Cy_h + y_p) = C \cdot L(y_h) + L(y_p) = C \cdot 0 + q = q$
- toinen suunta:
$L(y) = q \quad \Rightarrow \quad L(y) = L(y_p) \quad \Rightarrow \quad L(y - y_p) = 0$, joten $y - y_p$ on homogeeniyhtälön ratkaisu