Mitä ovat differentiaaliyhtälöt?

- ratkaistavana luvun sijasta tuntematon funktio $I \to R^n$, missä I on avoin väli
- yhtälössä esiintyy tuntemattoman funktion arvo jossain pisteessä sekä lisäksi sen derivaattoja samassa pisteessä
- korkeimman esiintyvän derivaatan kertalukua kutsutaan *yhtälön kertaluvuksi*
- normaalimuoto: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$
- esimerkkejä:

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = 2y(x) && \text{kertaluku 1}\\
&y'''(t) - ty'(t) + y(t) = 0 && \text{kertaluku 3}\\
&xy''(x) - \sqrt{y^{(5)}(x)} = \cos x + 8 && \text{kertaluku 5}\\
&\ddot{x}(t) = F/m && \text{kertaluku 2}
\end{aligned}
$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu

- DY on ratkaistu, kun tuntematon funktio y tunnetaan jollain halutulla (tai jokaisella mahdollisella) määrittelyvälillä I
- jos yhtälön kertaluku on n, on y:n oltava n kertaa jatkuvasti derivoituva välillä I
- ratkaisun saamiseksi on integroitava
- ratkaisu ei yleensä ole yksikäsitteinen, se riippuu paitsi välin I valinnasta, myös joistakin tuntemattomista parametreista (integroimisvakiot, yleensä n kpl)
- toisinaan joudutaan tyytymään *implisiittiratkaisuun*: yhtälöstä on saatu eliminoitua derivaatat, mutta $y(x)$:lle ei saada lauseketta

Ratkaisuväli, alkuarvotehtävä

- ratkaisuun liittyy olennaisena osana määrittelyväli I
- usein kiinnostavia ovat *maksimaaliset* ratkaisuvälit: ratkaisuvälit, joita ei voida laajentaa
- yhtälöön voidaan liittää n kpl *alkuarvoehtoja*:

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$

- alkuarvoehdoilla varustettua yhtälöä kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* (AAT)
- alkuarvoehdot auttavat
  a) ratkaisuvälin valinnassa
  b) tuntemattomien parametrien määrittämisessä

Merkintätapoja

- tuntematon funktio on yleensä y, ja se riippuu muuttujasta x tai t
- tuntematon on toisinaan myös x (paikka), joka riippuu t:stä (aika)
- funktion arvoa ei yleensä merkitä $y(x)$ vaan lyhyemmin y
- derivaattaa merkitään y' tai $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ tai $\dot{y}$ (ajan suhteen)
- puhutaan yleensä sekaisin y:stä funktiona ja funktion arvona, samoin sekoitetaan funktio ja sen kuvaaja
  - "ratkaisu kulkee alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$" $\Rightarrow$ ratkaisufunktion kuvaaja sisältyy alueeseen $D \subset \mathbb{R}^2$
  - Huom! merkintä "$y \neq 0$" epäselvä: y ei ole nollafunktio vai y ei saa koskaan arvoa nolla?

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause (1. kertaluku)

Hahmotettava y funktion arvona (sekä samastettava funktio ja sen kuvaaja).

Lause

(a) Olkoon D tason $\mathbb{R}^2$ alue, ja olkoot funktio $f = f(x, y)$ sekä sen osittaisderivaatta $\partial f/\partial y$ jatkuvia D:ssä. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Tällöin AAT:llä

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

on jollakin avoimella välillä I määritelty ratkaisu $y\colon I \to \mathbb{R}$. Erityisesti $x_0 \in I$.

(b) Olkoon $x_0 \in I_1 \cap I_2$, ja olkoot $y_k\colon I_k \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, kaksi kyseisen AAT:n ratkaisua, jotka kulkevat D:ssä. Tällöin

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in I_1 \cap I_2.$$

Separoituvat yhtälöt

- yhtälö on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = p(x)q(y)$$

  (normaalimuodossa siis $f(x, y) = p(x)q(y)$)
- oletetaan, että p on jatkuva ja q jatkuvasti derivoituva, jolloin OY-lause pätee
- OY-lauseesta seuraa, että ratkaisut eivät voi leikata toisiaan
- jokainen yhtälön $q(y) = 0$ ratkaisu antaa DY:n *triviaaliratkaisun* $y(x) = y_0$ (vakiofunktio)
- muut ratkaisut eivät toteuta ehtoa $q(y(x)) = 0$ millään x

Muiden ratkaisujen löytäminen

- voidaan määritellä funktio $h(y) = 1/q(y)$
- valitaan funktioiden h ja p integraalifunktiot H ja P
- ketjusäännön perusteella

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = H'(y(x))y'(x) = h(y)y'$$

- integroimalla saadaan implisiittiratkaisu:

$$\begin{aligned} & y' = p(x)q(y) \\ \iff & h(y)y' = p(x) \\ \iff & \int h(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int p(x)\,\mathrm{d}x \\ \iff & H(y) = P(x) + C. \end{aligned}$$

- implisiittiratkaisusta voidaan vielä yrittää ratkaista y