Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 4
28.8.–31.8.2012

Tehtävät 9–13 ovat kertaustehtäviä. Niitä ei käsitellä harjoituksissa, eikä niistä saa lisäpisteitä, mutta niihin ilmestyy malliratkaisut. Niihin saa myös kysyä apua pajassa.

1. Osoita seuraavissa kohdissa Wronskin determinantin avulla, että funktiot $y_1$ ja $y_2$ ovat lineaarisesti riippumattomat toisistaan:

   a) $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x$
   b) $y_1(x) = \sin sx$, $y_2(x) = \cos sx$ $(s \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
   c) $y_1(x) = e^{rx}$, $y_2(x) = xe^{rx}$ $(r \in \mathbb{R})$

2. Osoita, että $y(x) = x^3$ toteuttaa yhtälön

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0, \quad \text{kun } x > 0.$$

   Etsi kertaluvun pudotuksella toinen, lineaarisesti riippumaton ratkaisu.

3. Tarkastellaan homogeeniyhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, missä $p$ ja $q$ ovat jatkuvia avoimella välillä $I$.

   a) Osoita, että homogeeniyhtälöllä on ratkaisut $y_1$ ja $y_2$, joiden Wronskin determinantille pätee $W(y_1, y_2)(x_0) = 1$ jollakin $x_0 \in I$. (Vihje: OY-lause.)
   b) Päättele, että homogeeniyhtälön ratkaisuavaruuden dimensio on 2.

4. Määritä sellaiset parametrin $k$ arvot, että reuna-arvotehtävällä

$$y'' + ky = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

   on nollasta poikkeavia ratkaisuja.

5. Tarkastellaan homogeeniyhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, missä $p$ ja $q$ ovat jatkuvia funktioita. Osoita, että pari $(x^m, x^n)$ ei voi olla yhtälön perusjärjestelmä joukossa $\mathbb{R}$, jos $1 < m \leq n$. (Vihje: Tutki lineaarista riippumattomuutta.)

6. Ratkaise yhtälö

$$y'' + y' - 2y = 10 \sin x.$$

7. Ratkaise yhtälö

$$\ddot{x} + 9x = 4t - 2 + e^{-3t}.$$

8. Ratkaise vakioiden varioinnilla yhtälö

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x, \quad x > 0.$$

   Osittaisintegroinnista on apua.

9. Tunnista seuraavista yhtälöistä, mitkä ovat separoituvia, mitkä lineaarisia ja mitkä eksakteja.

a) $y \ln x = y' + 2$

b) $\dot{x} = (1 + x^2)(\sqrt{t} - 2)$

c) $y' = (1 + x^2)(xy - 1)$

d) $e^x \sin y - 2xy + y'(e^x \cos y - x^2) = 0$

e) $2xy - 1 + y'(\sin x - x^2) = 0$

f) $\dfrac{y'}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{y^2}{\tan x}$

g) $x' = \dfrac{3t + x}{t - 1}$

h) $\dfrac{y'}{y^2 + 2y + 1} = 1$

i) $y'x \ln x = -y - y \ln x$

j) $3z' \sin x = x^2 z$

Yritä ratkaista yhtälöistä mahdollisimman monta.

10. Tutki edellisen tehtävän yhtälöiden kohdalla, missä alueissa tiedät OY-lauseen varmasti pätevän. (Kun muutat yhtälöitä normaalimuotoon, ota huomioon mahdolliset nollalla jakamiset.)

11. Muunna seuraavat yhtälöt separoituviksi sopivilla sijoituksilla.

a) $y' = \sqrt{2x + 4y}$

b) $y' = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy - y^2}$

c) $y' = \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1$

d) $y' = \dfrac{x - 2y + 3}{-5x + y - 4}$

12. Keksi 2 eksaktia, 2 lineaarista ja epähomogeenista sekä 2 separoituvaa yhtälöä, ja ratkaise ne.

13. Valitse luvut $a$ ja $b$ siten, että alkuarvotehtävällä

$$(x^2 - 1)y' = (x - 1)y, \quad y(a) = b,$$

on a) tasan yksi b) ei yhtään c) ääretön määrä ratkaisuja.