Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 3
17.8.–23.8.2012

1. Ratkaise yhtälö
$$y' = (x + y + 2)^2.$$

2. Ratkaise yhtälö
$$x^2 - xyy' + y^2 = 0.$$

3. Ratkaise yhtälö
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-3x + ay + 4}{x + 3y + 2},$$
kun
$$\text{a)} \quad a = 1 \qquad \text{b)} \quad a = -9.$$

4. Funktiota $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sanotaan *kertaluvun k tasa-asteiseksi funktioksi*, jos sille pätee
$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$
kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Osoita, että yhtälö $y' = f(x, y)$ on tasa-asteinen, jos ja vain jos funktio f on kertaluvun 0 tasa-asteinen funktio.

5. Yhtälöä $y' + p(x)y = q(x)y^\lambda$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, kutsutaan *Bernoullin yhtälöksi*. Se palautuu sijoituksella $z(x) = y(x)^{1-\lambda}$ lineaariseksi yhtälöksi. Ratkaise tämän tiedon avulla alkuarvotehtävä
$$y' + 4xy = 2x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

6. Tarkastellaan alkuarvotehtävää
$$y' = \sin(y) + x, \quad y(0) = 0.$$
Arvioi Eulerin menetelmällä arvoa $y(2)$ käyttäen tasaista jakoa a) 10 b) 20 osaväliin.

7. Ratkaise alkuarvotehtävä
$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -1.$$

8. Ratkaise seuraavat yhtälöt:
$$\text{a)} \quad \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \qquad \text{b)} \quad y'' + y' + y = 0.$$

9. Olkoot p ja q jatkuvia funktioita.

   a) Osoita, että operaattori $L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y$ on lineaarinen, eli että seuraavat ehdot pätevät kaikilla kahdesti jatkuvasti derivoituvilla funktioilla y_1 ja y_2 ja reaaliluvuilla a:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$
$$L(ay_1) = aL(y_1).$$

   b) Osoita, että jos y_1 ja y_2 ovat homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisuja, myös funktio $C_1y_1 + C_2y_2$ on saman yhtälön ratkaisu kaikilla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

10. Osoita, että funktiot $y_1(x) = e^{2x}$ ja $y_2(x) = e^{5x}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, ts. ei ole olemassa sellaisia kertoimia $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, että

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}$$

ja vähintään toinen kertoimista on nollasta poikkeava.

Vihje: Tee vastaoletus, sijoita x:n paikalle eri lukuja ja johda ristiriita.

11. Etsi yhtälön $y'' + 9y = 0$ ratkaisu, jolle pätee

$$\text{a)} \quad y(0) = 0 \quad \text{ja} \quad y(1) = 1 \qquad \text{b)} \quad y(0) = 0 \quad \text{ja} \quad y(1) = 0.$$

12. Olkoon r vakiokertoimiseen homogeeniyhtälöön $y'' + ay' + b = 0$ liittyvän karakteristisen polynomin juuri.

   a) Osoita, että $y_1 = e^{rx}$ on homogeeniyhtälön ratkaisu.

   b) Osoita, että jos r on kaksoisjuuri, myös $y_2 = xe^{rx}$ on homogeeniyhtälön ratkaisu.

Kohdassa a) voit halutessasi olettaa, että r on reaalinen, mutta sama todistus toimii myös, jos r on kompleksinen.

13. Tarkastellaan homogeeniyhtälöä $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, missä p ja q ovat jollain välillä I määriteltyjä jatkuvia funktioita. Olkoon $x_0 \in I$.

   a) Osoita, että on olemassa homogeeniyhtälön ratkaisut y_1 ja y_2, joille pätee

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0,$$
$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1.$$

   b) Olkoot y_1 ja y_2 kuten edellisessä kohdassa, ja olkoon z eräs mielivaltainen homogeeniyhtälön ratkaisu. Määritä vakiot C_1 ja C_2 siten, että funktio $y = C_1y_1 + C_2y_2$ toteuttaa ehdot $y(x_0) = z(x_0)$ ja $y'(x_0) = z'(x_0)$.

   c) Osoita, että edellisessä kohdassa pätee $y = z$.

   d) Päättele, että homogeeniyhtälöllä on perusjärjestelmä välillä I.