Differentiaaliyhtälöt I
Harjoitus 2
10.8.–16.8.2012

Kirjoita tehtävien ratkaisut selvästi ja hyvällä kielellä, sillä ensi viikon laskuharjoituksissa saatat joutua lukemaan jonkun toisen ratkaisuja.

1. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$(x+1)y' = y, \quad y(x_0) = y_0.$$

   a) Osoita, että jos $x_0 = -1$ ja $y_0 \neq 0$, AAT:llä ei ole ratkaisuja.
   b) Osoita, että jos $x_0 \neq -1$, AAT:llä on täsmälleen yksi ratkaisu. Mikä on tällöin maksimaalinen ratkaisuväli?
   c) Osoita, että jos $x_0 = -1$ ja $y_0 = 0$, AAT:llä on äärettömän monta ratkaisua.

2. Juuri tenttiä edeltävän päivän aamuna kissa kaatoi kahvikupin luentomuistiinpanojen päälle. Täydennä seuraava kahvin turmelema lause ja sen todistus.

Lause 1. *Tarkastellaan ensimmäisen kertaluvun (...) differentiaaliyhtälöä*

$$L(y) = y' + p(x)y = q(x). \tag{@}$$

Oletetaan, että y_p on yhtälön (@) jokin yksittäisratkaisu. Tällöin, jos y on jokin toinen saman yhtälön ratkaisu, se on muotoa $y = y_h + y_p$, missä y_h on vastaavan h(...)n ratkaisu.

Todistus. Olkoon y jokin yht(... ...). Tarkastellaan erotusta $y - y_p$. Koska operaattori L on (...), voidaan päätellä

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = (\dots) = 0.$$

Nähdään, että erotus $y - y_p$ on (...)n ratkaisu. Merkitään sitä (...), jolloin $y = y_h + y_p$. □

3. Tarkista seuraavissa tapauksissa, että vasemmanpuoleinen funktio on oikeanpuoleisen yhtälön potentiaali.

   a) $F(x,y) = xy^2 - 2x + y, \qquad y^2 - 2 + (2xy+1)y' = 0$
   b) $F(x,y) = x^2 - \sin y + ye^x, \qquad 2x + ye^x + (e^x - \cos y)y' = 0$

4. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt.

   a) $2xy + 3 + (x^2-1)y' = 0$ b) $\sin y - 3x^2 + y'x\cos y = 0$

5. Osoita, että funktio

$$F(x, y) = \frac{y}{x} + x^2$$

ei ole yhtälön $2x^3 - y + xy' = 0$ potentiaali mutta $F(x, y) = C$ on silti yhtälön implisiittiratkaisu kaikilla $C \in \mathbb{R}$. Miten tämä on mahdollista?

6. Osoita, että jos yhtälö $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ on eksakti, niin

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

7. Näytä, että yhtälö $y(x + 1) + (y^3 + x)y' = 0$ ei ole eksakti. Yritä kuitenkin soveltaa siihen eksaktin yhtälön ratkaisumenetelmää. Mikä menee pieleen?

8. Ratkaise differentiaaliyhtälö $e^x y + 1 + (e^x - 1)y' = 0$ alkuarvoehdoilla

$$\text{a)} \quad y(1) = 1 \qquad \text{b)} \quad y(0) = 0$$

9. Osoita, että jokainen separoituva yhtälö on yhtäpitävä jonkin eksaktin yhtälön kanssa jossakin alueessa. Ratkaise eksaktin yhtälön ratkaisumenetelmällä yhtälö $y' = x^2(y + 1)$.

10. Olkoot M ja N jatkuvasti derivoituvia funktioita. Oletetaan, että funktio

$$g(x, y) = \frac{1}{M(x, y)} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

riippuu vain y:stä eli on x:n suhteen vakiofunktio. Osoita, että funktio

$$\mu(y) = \exp\left(\int g(x, y) \, \mathrm{d}y \right)$$

on integroiva tekijä, joka tekee yhtälöstä $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ eksaktin.

11. Etsi yhtälölle $2x^3 - y + xy' = 0$ integroiva tekijä lauseen 1.7 avulla ja ratkaise yhtälö.

12. Osoita, että 1. kertaluvun lineaarisesta yhtälöstä saa eksaktin sopivalla integroivalla tekijällä.

13. Etsi käyrät $y = y(x)$, joilla on se ominaisuus, että käyrän pisteeseen $(x_0, y(x_0))$ piirretty tangentti leikkaa aina x-akselin pisteessä $(x_0 + x_0^2/k, 0)$, missä $k \neq 0$ on vakio. Piirrä eräs tällaisista käyristä, kun $k = 4$, sekä käyrälle tangentit pisteisiin, joissa x_0 on 2, -2 ja -6.