

Differentiaaliyhtälöt I

Harjoitus 1

3.8.–9.8.2012

1. Mitkä seuraavista ovat differentiaaliyhtälöitä? Määritä niiden kertaluvut. Muuta ne normaalimuotoon, jos se on mahdollista.

a) $xy + \sin(xy') - 5(y'')^2 = 1,$	b) $\dot{x} = (t - x - 2)^2$
c) $5y^{(4)} + xy'' = 1/y$	d) $y'(x) = y(\pi - x)$
e) $2ty' = t/y$	f) $xyz = \sqrt{y'}$

2. Osoita, että seuraavissa kohdissa vasemmanpuoleiset funktiot ovat oikeanpuoleisten yhtälöiden ratkaisuja. Määritä kussakin tapauksessa kaikki maksimaaliset ratkaisuvälit. (Tässä A, B, C ja D ovat vakioita.)

a) $y = Ce^{x^2},$	$y' = 2xy$
b) $y = e^x(A \sin x + B \cos x),$	$y'' - 2y' + 2y = 0$
c) $y = C \tan(Cx + D),$	$y''/y' = 2y.$

3. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $2y' + x - \sin(y) = 0$. Oletetaan, että yhtälöllä on välillä I kaksi eri ratkaisua y_1 ja y_2 . Osoita, että ratkaisut eivät leikkaa toisiaan eli että ei ole olemassa pistettä $x_0 \in I$, jolle pätsi $y_1(x_0) = y_2(x_0)$.

4. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' + y^2 \cos x = 0. \quad (*)$$

a) Etsi yhtälölle (*) jokin triviaaliratkaisu.

b) Merkitään $y_n(x) = \underbrace{\sin(\sin(\dots \sin(x) \dots))}_{n \text{ kpl}}$. Osoita, että funktio $y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ei voi olla yhtälön (*) ratkaisu millään n .

5. Ratkaise seuraavista differentiaaliyhtälöistä separoituvat yhtälöt.

a) $y' = \sin(x + y)$	b) $y' = e^{2x-y}$	c) $y' = 2x - y$	d) $y' = x + xy$
-----------------------	--------------------	------------------	------------------

(Tässä ei tarvitse todistaa tarkasti, että yhtälö ei ole separoituva.)

6. Todista, että yhtälö $y' = x + y$ ei ole separoituva.

7. Ratkaise yhtälö $y' = x + y$ sijoittamalla $z(x) = x + y(x)$.

8. Ratkaise yhtälö $1 + 2x - 2yy' = 0$ alkuehdolla

a) $y(0) = -2$	b) $y(0) = 0.$
----------------	----------------

9. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt.

a) $y' + 2y/x = 4x$ b) $y' + (\cos x)y = e^{-\sin x}$ c) $(x^2 + 1)y' + xy = x$

10. Tarkastellaan lineaarista 1. kertaluvun yhtälöä $y' + p(x)y = q(x)$. Oletetaan, että yhtälöllä on ratkaisut $y_1 = x \ln x$ ja $y_2 = x(\ln x + 1)$. Selvitä kerroinfunktio $p(x)$. (Vihje: Etsi ensin homogeenisen yhtälön ratkaisu.)

11. Ratkaise differentiaaliyhtälö $(x - 2)y' - y = 2(x - 2)^3$ alkuehdoilla

a) $y(0) = 0$ b) $y(2) = 0$ c) $y(2) = 1$.

Miten ratkaisut voidaan ymmärtää OY-lauseen 1.2 kannalta?

12. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' + 2y' = x$.

13. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y''/y' = 2y$. (Vihje: Sijoita $y'(x) = z(y)$, jolloin ketjusäännön nojalla voidaan päätellä $y''(x) = dz/dx = z'(y) \cdot y'(x)$.)