Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Vektorianalyysi (Syksy 2010)
Harjoitus 8
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1. ([Martio; h. 3.3:1]) Määritä kuvauksen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, xy, z^2)$, Jacobin determinantti pisteessä (x,y,z). Missä pisteissä kuvaus on lokaali diffeomorfismi?

Ratkaisu:
Nyt

$$\det f'(x,y,z) = \begin{vmatrix} \partial_1 f_1(x,y,z) & \partial_2 f_1(x,y,z) & \partial_3 f_1(x,y,z) \\ \partial_1 f_2(x,y,z) & \partial_2 f_2(x,y,z) & \partial_3 f_2(x,y,z) \\ \partial_1 f_3(x,y,z) & \partial_2 f_3(x,y,z) & \partial_3 f_3(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & 2z \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & 2z \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2xz \neq 0, \quad \text{kun} \quad xz \neq 0.$$

Näin ollen, käänteiskuvauslauseen nojalla, kuvaus f on lokaali diffeomorfismi pisteissä $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$, joilla $xz \neq 0$ eli pisteissä jotka eivät kuulu xy- tai yz-tasoon.

2. Määritä ellipsoidin $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$ tangenttitason yhtälö pisteessä $(1,1,1)$.

Ratkaisu:
Olkoon $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Koska $\nabla f(1,1,1) = (2,4,6) \neq \bar{0}$ ja ellipsi on funktion f tasa-arvopinta $f(x,y,z) = 6$, jolla piste $(1,1,1)$ sijaitsee; saadaan ellipsin tangettitasoksi pisteessä $(1,1,1)$ niiden vektorien $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ joukko, joilla

$$(\bar{x} - (1,1,1)) \cdot (\nabla f(1,1,1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{x} - (1,1,1)) \cdot (2,4,6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1) + 4(y-1) + 6(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

3. Osoitettava, että yhtälö $x^2 - ze^{x+y+z} = 0$ määrää jossain origon ympäristössä pinnan. Määritä origoon piirretyn tangenttitason yhtälö.

Ratkaisu:
Merkitään $f(x,y,z) = x^2 - ze^{x+y+z}$. Tällöin $\nabla f(0,0,0) = (0,0,-1) \neq \bar{0}$ ja erityisesti $\partial_3 f(0,0,0) \neq 0$, joten implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa $\phi(x,y)$, joka toteuttaa yhtälön $f(x,y,\phi(x,y)) = 0$ pisteen $(x,y) = (0,0)$ riittävän pienessä ympäristössä siten, että $\phi(0,0) = 0$. Yhtälö $x^2 - ze^{x+y+z} = 0$ määrää siis jossakin origon ympäristössä pinnan $r(x,y) = (x,y,\phi(x,y))$.

Koska $\nabla f(0,0,0) = (0,0,-1) \neq \bar{0}$ ja pinta $r(x,y)$ on funktion f tasa-arvopinta, saadaan sen tangenttitasolle origossa yhtälö:

$$(\bar{x} - (0,0,0)) \cdot (\nabla f(0,0,0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) \cdot (0,0,-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Toisin sanoen pinnan $r(x,y)$ tangenttitaso origossa on xy-taso.

4. Olkoon f kahden muuttujan kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla yhtälö $f(x,y)=0$ määrää pisteen (x,y) ympäristössä funktion $y=\phi(x)$. Määritäfunktion ϕ toinen derivaatta funktion f osittaisderivaattojen avulla.

Ratkaisu:
Koska piste (x,y) esiintyy jo funktion f muuttujana, käytän selkeyden vuoksi merkintää (x_0,y_0) sille (kiinteälle) pisteelle, jonka ympäristössä käyrä $(x,\phi(x))$ on määritelty.

Tehtävässä pitää lisäksi olettaa, että $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$. Tällöinkin $\phi''(x)$ voidaan ratkaista vain siinä x_0:n ympäristössä, jossa $\partial_2 f(x,\phi(x))\neq 0$.

Olkoon siis $\partial_2 f(x_0,y_0)\neq 0$. Tällöin yhtälöstä $f(x,\phi(x))=0$ (joka siis pätee jossakin pisteen x_0 ympäristössä, missä yhtälön toteuttava funktio ϕ on määritelty) seuraa, että

$$\frac{df(x,\phi(x))}{dx}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \partial_1 f(x,\phi(x))+\phi'(x)\partial_2 f(x,\phi(x))=0,$$

mikä nähdään ketjusääntöä käyttämällä. Saatu yhtälö on ekvivalentti yhtälöiden

$$\phi'(x)\partial_2 f(x,\phi(x))=-\partial_1 f(x,\phi(x)) \tag{1}$$

ja

$$\phi'(x)=\frac{-\partial_1 f(x,\phi(x))}{\partial_2 f(x,\phi(x))} \tag{2}$$

kanssa. (Näistä jälkimmäisessä siis tarvittiin ehtoa $\partial_2 f(x,\phi(x))\neq 0$.)

Derivoimalla yhtälöä (1) puolittain x:n suhteen ja käyttämällä ketjusääntöä saadaan, että

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big(\phi'(x)\partial_2 f(x,\phi(x))\Big)=\frac{d}{dx}\Big(-\partial_1 f(x,\phi(x))\Big)\\
\Leftrightarrow\quad &\phi''(x)\partial_2 f(x,\phi(x))+\phi'(x)\partial_{12} f(x,\phi(x))+(\phi'(x))^2\partial_2^2 f(x,\phi(x))\\
&=-\partial_1^2 f(x,\phi(x))-\phi'(x)\partial_{21} f(x,\phi(x))
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tähän yhtälö (2) ja jakamalla $\partial_2 f(x,\phi(x))$:llä, saadaan ϕ'' lausuttua nyt pelkästään f:n osittaisderivaattoja käyttämällä seuraavassa muodossa:

$$\phi''(x)=\frac{-2\frac{-\partial_1 f(x,\phi(x))}{\partial_2 f(x,\phi(x))}\partial_{12} f(x,\phi(x))-\left(\frac{-\partial_1 f(x,\phi(x))}{\partial_2 f(x,\phi(x))}\right)^2\partial_2^2 f(x,\phi(x))-\partial_1^2 f(x,\phi(x))}{\partial_2 f(x,\phi(x))}.$$

Tässä siis käytettin kaavaa $\partial_{21} f(x,\phi(x))=\partial_{12} f(x,\phi(x))$, mikä seuraa siitä että f on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. (Myös ehto $\partial_2 f(x,\phi(x))\neq 0$ tarvittiin.)

Kommentti: Lisäoletus $\partial_2 f(x,\phi(x))\neq 0$ on todellakin oleellinen, sillä esimerkiksi funktiolla $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y^2$ yhtälön $f(x,\phi(x))\equiv 0$ ratkaisee pisteen $(x_0,y_0)=(0,0)$ kautta funktio $\phi(x)\equiv 0$, mutta tehtävän metodilla ei funktiota ϕ, eikä sen derivaattoja saa ratkaistua millään x:n arvolla, koska $\partial_2 f(x,\phi(x))\equiv 0$. Silti $\phi(x)$ on määritelty ja kahdesti derivoituva kaikkialla $\mathbb{R}$:ssä.

5. Määritä funktion f, $f(x,y)=x^3-3xy^2$, suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1\}$.

Ratkaisu:
Käytetään Martion kirjan sivun 89 metodia ääriarvojen selvittämisessä.

Nyt $\partial A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ g(x,y)=0\}$, kun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1\}$ ja $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

Laskemalla saadaan

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 3y^2, -6xy), \quad \nabla g(x,y) = (2x, 2y);$$

joten Lagrangen kertoimen yhtälöstä $\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y)$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0 = -6x^2 + 3y^2 - \lambda 2x \\ 0 = 6xy - \lambda 2y \\ 0 = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Oletetaan ensin, että $y \neq 0$ ja muistetaan tarkistaa myös jäljelle jäävät pisteet $(\pm 1, 0)$ mahdollisten ääriarvojen varalta. Nyt keskimmäisestä yhtälöstä saadaan $\lambda = 3x$ ja sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan, että $0 = 9x^2 - 3y^2$. Viimeisestä yhtälöstä puolestaan nähdään, että $y^2 = 1 - x^2$ ja kun tämä sijoitetaan äsken saatuun yhtälöön, saadaan ratkaistuksi $x = \pm 1/2$, josta puolestaan saadaan y:lle arvo $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\sqrt{3}/2$. Saatiin siis ratkaisut $(\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$, $(\pm 1/2, \mp\sqrt{3}/2)$ ja $(\pm 1, 0)$.

Kokeilemalla mitä arvoja f saa kyseisissä pisteissä nähdään, että

$$f(\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2) = (\pm 1/2)^3 - 3(\pm 1/2)(\pm\sqrt{3}/2)^2 = \mp 3/4,$$
$$f(\pm 1/2, \mp\sqrt{3}/2) = (\pm 1/2)^3 - 3(\pm 1/2)(\mp\sqrt{3}/2)^2 = \mp 3/4,$$
$$f(\pm 1, 0) = (\pm 1)^3 - (\pm 1)(0)^2 = \mp 1,$$

joista viimeinen yhtälö antaa suurimman ja pienimmän arvon ∂A:lla, sekä pisteet joissa ne saavutetaan.

Etsitään seuraavaksi mahdolliset lokaalit ääriarvot joukossa A, jotka ovat siis f:n kriittisiä pisteitä. Nyt

$$\nabla f(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3x^2 - 3y^2 \\ 0 = 6xy \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan, että $y^2 = x^2$, mistä ratkaisemalla $x = \pm y$ ja $y = \pm x$ nähdään, että viimeinen yhtälö toteutuu joukossa A vain jos $(x,y) = \bar{0}$. Ainoa kriittinen piste on siis origo ja siinä f saa arvon

$$f(0,0) = 0^3 - 3 \cdot 0 \cdot 0^3 = 0.$$

Kaiken kaikkiaan nähdään, että f:n suurin arvo joukossa $\overline{A}$ on $f(-1,0) = 1$ ja pienin arvo joukossa $\overline{A}$ on $f(1,0) = -1$.

6. Määritä funktion f, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, suurin ja pienin arvo joukossa $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 2\}$. **Vihje**: Nyt ei ehkä kannata yrittää Lagrangen kertojia.

Ratkaisu:

Olkoon $p(t) = t^3$; tällöin $f(x,0) = p(x)$ ja $f(0,y) = p(y)$. Tästä nähdään, että niillä kahdella neliön $\overline{A}$ sivulla, joilla joko $x = 0$ tai $y = 0$, f:n pienin arvo on $f(0,0) = 0$ ja suurin arvo on $f(2,0) = f(0,2) = 8$.

Tarkastellaan seuraavaksi f käyttäytymistä kahdella jäljellä olevalla neliön $\overline{A}$ sivulla. Olkoon $h(t) = 8 + t^3 - 6t$; tällöin $f(x,2) = h(x)$ ja $f(2,y) = h(y)$. Nyt

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

ja $h(\sqrt{3}) = 9 + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3(3 - \sqrt{3})$. Toisaalta $h(0) = 8$ ja $h(2) = 4$.

Joukolla ∂A f saa siis minimiarvon $f(0,0) = 0$ ja maksimiarvon $f(2,0) = f(0,2) = 8$.

Etsitään seuraavaksi f:n kriittiset pisteet A:ssa:

$$\nabla f(x,y) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3x^2 - 3y \\ 0 = 3y^2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Yhtälöistä seuraa, että $x = x^4$ ja $y = y^4$; mikä voi olla totta joukossa A vain jos $x = y = 1$. Ainoa kriittinen piste on siis $(1,1)$ ja siinä f saa arvon

$$f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

Nyt nähdään, että f:n suurin arvo joukossa $\overline{A}$ on $f(0,2) = f(2,0) = 8$ ja pienin arvo joukossa $\overline{A}$ on $f(1,1) = -1$.