Vektorianalyysi

Seitsemäs luentoviikko, syksy 2010

Alla tiivistelmä seitsemännen luentoviikon aikana käsitellyistä asioista.

- Aloitimme määrittelemällä *polun* jatkuvana kuvauksena $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$, tässä $\Delta = [a, b]$ on suljettu $\mathbb{R}$:n väli. Jatkossa tulemme tarkastelemaan ainoastaan differentoituvia polkuja, eli polkuja jotka ovat välin Δ sisäpisteissä differentioituvia, ja päätepisteissä toispuoleisesti differentioituvia. Määrittelimme edelleen, että polku γ on *umpinainen* jos $\gamma(a) = \gamma(b)$.

- Polun γ tangenttivektori pisteessä $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ on vektori $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$.

- Seuraavaksi määrittelimme $\mathbb{R}^3$:n pinnan jatkuvana kuvauksena $\sigma : Q \to \mathbb{R}^3$, tässä $Q = [a, b] \times [c, d]$ on tason suljettu suorakaide. Oletamme jatkossa aina että kuvaus σ on differentioituva sisäpisteissä, ja toispuoleisesti differentioituva reunapisteissä.

- Pinnan pisteeseen $\sigma(s, t) = (\sigma_1(s, t), \sigma_2(s, t), \sigma_3(s, t))$ tangentiaaliset vektorit saadaan osittaisderivoimalla:

  $$\tau_1(s, t) = \partial_s \sigma(s, t) = (\partial_s \sigma_1(s, t), \partial_s \sigma_2(s, t), \sigma_3(s, t)),$$

  ja

  $$\tau_2(s, t) = \partial_t \sigma(s, t) = (\partial_t \sigma_1(s, t), \partial_t \sigma_2(s, t), \sigma_3(s, t)).$$

- Sanomme että pinta σ on *säännöllinen*, jos jokaisessa pisteessä vektorit τ_1 ja τ_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin voimme määritellä pinnalle pisteessä $\sigma(s, t)$ kohitsuoran nollasta eroavan vektorin asettamalla

  $$n(s, t) = \tau_1(s, t) \times \tau_2(s, t).$$

- Tärkeä esimerkki pinnasta on R–säteisen origokeskisen kuulan pinta. Tätä vastaa parametriesitys

  $$[0, \pi] \times [0, 2\pi] \ni (\theta, \varphi) \mapsto (R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta).$$

- Lopuksi tutkimme *tasa–arvopintaa* $g(x, y, z) = 0$. Tässä g on $\mathbb{R}^3$ avoimessa joukossa määritelty funktio. Mikäli ∇g ei häviä missään pisteessä, perustelimme että tasa–arvopinta on pinta ylläolevassa mielessä, ja sen normaali on gradientin ∇g suuntainen.