Vektorianalyysi

Viides ja kuudes luentoviikko, syksy 2010

Alla tiivistelmä viidennen ja kuudennen luentoviikon aikana käsitellyistä asioista.

- Keskeinen teema luennoilla on ollut funktion käytöksen ymmärtäminen kriitisten pisteiden ympäristössä. Aluksi käsittelimme Taylorin kehitelmän kolme kertaa jatkuvasti derivoituvalle kahden muuttujan funktiolle:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \partial_{ij} f(x)\, h_i h_j + O(\|h\|^3),$$

  missä $h = (h_1, h_2)$.

- Määrittelimme, että piste $x = (x_1, x_2)$ on funktion f *kriittinen piste*, jos $\nabla f(x) = 0$.

- Käyttäen ns. Hessin matriisia

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \partial_{12} f(x) \\ \partial_{12} f(x) & \partial_{22} f(x) \end{pmatrix}$$

  voimme siis kirjoittaa krittisen pisteen x ympäristössä

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle + O(\|h\|^3).$$

- Seuraavaksi tutkimme kriittisessä pisteessä neliömuotoa

$$Q(h,h) = \langle \nabla^2 f(x) h, h \rangle.$$

  Osoitimme seuraavat seikat: 1) Jos $Q(h,h)$ on positiividefiniitti, niin kriittinen piste x on lokaali minimi, 2) jos $Q(h,h)$ on negatiividefiniitti, niin kriittinen piste x on lokaali maksimi ja 3) Jos $Q(h,h)$ on indefiniitti, kyseesä ei ole lokaali ääriarvo. Viimeinen kohta oli itseasiassa viidensien harjouitusten viimeinen tehtävä.

- Loppu aika käytettiin kokeeseen kertaamiseen.