Vektorianalyysi

Kolmas luentoviikko, syksy 2010

Alla tiivistelmä kolmannen viikon aikana käsitellyistä asioista.

- Maanantain luennolla laskimme esimerkkejä - nämä löydät helpoimmin luentomuistiinpanoista. Ensimmäinen uusi asia oli seuraava tärkeä tulos: Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Oletetaan, että kaikki osittaisderivaatat $\partial_k f$, $k = 1, \ldots, n$, ovat olemassa ja jatkuvia D:ssä. Tällöin f on differentioituva D:ssä. Huomaa, että myös f:n jatkuvuus seuraa oletuksista.

- Gradientin geometriseen merkitykseen palaamme vielä uudestaan. Differentoituvalle funktiolle kuitenkin totesimme, että se kasvaa annetussa pisteessä voimakkaimmin gradientin suuntaan, ja vähenee nopeimmin gradientille vastakkaiseen suuntaan. Mikäli $\nabla f(x) = 0$, ei tämä tarkastelu ole oikein mielekäs. Funktion f käytöstä näissä pisteissä x tarkastelemme erikseen myöhemmin.

- Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$. Olkoon $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, ja $x \in D$. Tarkastellaan *erotusosamäärää pisteessä x suuntaan α*:

  $$\frac{f(x + t\alpha) - f(x)}{t}.$$

  Mikäli tällä on raja–arvo, kun $t \to 0$, kutsumme sitä *funktion f derivaataksi suuntaan α pisteessä x*, ja käytämme siitä merkintää $\partial_\alpha f(x)$. Huomaa, että mikäli α on k:s koordinaattivektori e_k, niin tämä derivaattaa yhtyy k:nteen osittaisderivaattaan.

- Lopuksi kätevä tapa laskea suunnattu derivaatta: mikäli f on differentioituva pisteessä x, niin pätee

  $$\partial_\alpha f(x) = \langle \nabla f(x), \alpha \rangle.$$